

### Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Hahn, Hans:** Über separable Mengen. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 7, 58—59 (1933).

**Chamard, L.:** Sur les points  $(\alpha)$ , au sens de M. Georges Durand. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 396—400 (1932).

Zur Definition der  $(\alpha)$ -Punkte einer abgeschlossenen Menge vgl. Durand, dies. Zbl. 3, 222. Es werden einige einfache hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein Punkt des Raumes  $(\alpha)$ -Punkt einer abgeschlossenen Menge ist. Z. B.: Besitzt die abgeschlossene Menge  $E$  den Durchmesser  $d$ , so ist jeder Punkt, dessen Entfernung von  $E$  größer als  $\frac{d\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$  ist, ein  $(\alpha)$ -Punkt von  $E$ . Ferner geläufige Dinge über konvexe Körper in teilweise neuer Terminologie. Z. B.: Die Menge der Mittelpunkte der maximalen eingeschriebenen Kugeln eines konvexen Körpers hat keinen inneren Punkt.

W. Fenchel (Göttingen).

**Bielecki, Adam:** Sur une généralisation d'un théorème de Weierstrass. Ann. Soc. Polon. math. 10, 33—41 (1932).

**Ważewski, T.:** Remarque sur un théorème de M. Bielecki. Ann. Soc. Polon. math. 10, 42—44 (1932).

Le théorème de M. Bielecki dans l'interprétation de M. Ważewski est le suivant: Soit  $A$  un ensemble situé dans un espace à  $n$  dimensions et tel que  $A = F - G$ ,  $F$  et  $G$  étant deux ensembles fermés (bornés ou non); soit en outre  $f(x)$  une fonction continue dans  $A$ . Il existe alors un ensemble ouvert  $E$  contenant  $A$  et une suite  $f_n$  convergeant uniformément vers  $f$  (dans  $A$ ), les éléments  $f$  de cette suite étant des fonctions ayant dans tous les points de  $E$  des dérivées partielles continues de tous les ordres.

A. Kolmogoroff (Moskau).

**Sierpiński, W.:** Sur le problème de la relativisation du théorème de M. W. H. Young. C. R. Soc. Sci. Varsovie 24, 288—289 (1932).

If  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , there is a linear set  $E$  which has at most an enumerable set of points in common with every linear closed non-dense set. (N. Lusin, C. R. Paris 158, 1259.) If  $D$  is an enumerable subset of  $E$  dense in  $E$  the set  $H = E - D$  has no non-enumerable subset which is closed in  $E$ . But  $H$  is a  $G_\delta$  relative to  $E$ . W. H. Young has shown that every linear non-enumerable  $G_\delta$  contains a non-enumerable closed set (see F. Hausdorff, Mengenlehre, p. 136. Berlin and Leipzig 1927). E. W. Chittenden.

**Sierpinski, W.:** Sur les anneaux de fonctions. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 63—64 (1931).

**Malehair, Henri:** Sur les fonctions limites de suites monotones. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 5—8 (1933).

Désignant par  $F^\alpha$  les fonctions de classe  $\alpha$  de Baire limites de suites non croissantes (ou non décroissantes) de fonctions de classe  $< \alpha$ , l'auteur démontre les théorèmes: 1. Si  $f$  est une  $F^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), les ensembles  $E(f \geq k)$  sont  $F$  de classe  $\alpha - 1$  quelque soit  $k$  (cf. De la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue etc., p. 133). 2. Si la fonction bornée  $f$  est telle que  $E(f \geq k)$  est de classe  $\alpha - 1$  pour tout  $k$ ,  $f$  est une  $F^\alpha$  ou une fonction de classe  $< \alpha$ .

J. Ridder (Groningen).

**Viola, Tullio:** Classificazione secondo Baire delle funzioni continue da una parte e dei loro numeri derivati. Math. Z. 36, 377—393 (1933).

Sei die reelle Funktion  $F(x)$  rechtsseitig stetig in einem Intervalle. Sie hat dann nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte, gehört also zur ersten Baireschen Klasse.



Hat  $F(x)$  in jedem Punkte eine endliche rechtsseitige Ableitung  $D_+ F(x)$ , so kann eine Folge gegen  $F(x)$  konvergierender stetiger Funktionen  $\varphi_n(x)$  gebildet werden, so daß auch  $\varphi_n(x)$  in jedem Punkte eine rechtsseitige Ableitung  $D_+ \varphi_n(x)$  besitzt, und daß überall  $D_+ F(x) = \lim_n D_+ \varphi_n(x)$  gilt; es gilt dabei auch

$$D_+ F(x) = \lim_n 2^n \left( \varphi_n \left( x + \frac{1}{2^n} \right) - \varphi_n(x) \right);$$

es ist also  $\overline{D_+ F(x)}$  Grenze stetiger Funktionen, also von erster Bairescher Klasse. Sind in jedem Punkte rechtsseitige obere und untere Ableitung  $\overline{D_+ F(x)}$ ,  $\underline{D_+ F(x)}$  endlich, so können die gegen  $F(x)$  konvergierenden stetigen Funktionen  $\varphi_n(x)$  so gewählt werden, daß  $\overline{D_+ F(x)} = \lim_n \overline{D_+ \varphi_n(x)}$ ,  $\underline{D_+ F(x)} = \lim_n \underline{D_+ \varphi_n(x)}$ , und  $\overline{D_+ F(x)}$ ,  $\underline{D_+ F(x)}$  sind von zweiter Bairescher Klasse.

H. Hahn (Wien).

**Wiener, Norbert, and R. C. Young:** The total variation of  $g(x+h) - g(x)$ . Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 327—340 (1933).

Es sei  $g(x)$  in  $[0,1]$  von beschränkter Schwankung und in den Endpunkten stetig. Ferner sei  $g(x) = f(x) + \gamma(x)$ , wo  $f(x)$  absolut stetig und fast überall  $\gamma'(x) = 0$ . Aus einem Satz von Lebesgue folgt leicht

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_0^1 |d[g(x+h) - g(x)]| = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_0^1 |d[\gamma(x+h) - \gamma(x)]|, \quad (1)$$

wenn  $h$  auf irgendeine Weise (stetig oder durch abzählbar viele Werte) gegen Null strebt. Für stetig gegen Null strebendes  $h$  wird ferner das folgende Hauptergebnis erzielt:

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \int_0^1 |d[\gamma(x+h) - \gamma(x)]| = 2 \int_0^1 |d\gamma(x)|. \quad (2)$$

Dieselbe Gleichung (2) gilt auch, wenn  $h$  irgendwie gegen Null geht, vorausgesetzt daß  $h$  eine gewisse Nullmenge  $H$  von Ausnahmewerten vermeidet. In (1) und (2) ist ein bekannter Satz von A. Plessner [J. f. Math. **160**, 26—32 (1928)] als Spezialfall enthalten. Die von den Verff. im Beweis von (2) wohl versehentlich ausgesprochene Voraussetzung, daß  $\gamma'(x) = 0$  in einer offenen Punktmenge vom Maß Eins sei, welche die Gültigkeit des Satzes wesentlich einschränken würde, ist nicht notwendig, wie man sich sofort überzeugt. An Hand der klassischen monotonen Funktion  $\gamma(x)$  von Cantor und sinnreicher Abänderungen derselben zeigen die Verff., daß die Ausnahmestelle  $H$  unter Umständen sowohl leer, abzählbar als auch nichtabzählbar sein kann.

I. J. Schoenberg (Cambridge, Mass.).

**Goldowsky, G.:** Quelques propriétés des dérivées exactes. Rec. math. Soc. math. Moscou **39**, Nr 3, 3—5 (1932).

Une fonction bornée est nommée dérivée exacte au point  $z$ , si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (L) \{f(x) - f(z)\} dx = 0.$$

L'article contient quelques théorèmes sur les dérivées exactes. E. a.: Si  $f(x)$  est bornée, égale à zero au point  $z$ , non négative dans un intervalle  $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$  et si  $f(x)$  est une dérivée exacte dans  $z$ , alors elle est approximativement continue au point  $z$ . Ces théorèmes permettent d'obtenir d'une façon simple quelques résultats de Wilkosz, Fundam. Math. **2**, 145 e. s. (1921).

J. Ridder (Groningen).

**Currier, A. E.:** Proof of the fundamental theorems on second-order cross partial derivatives. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 245—253 (1933).

Das Hauptergebnis dieser Arbeit lautet: „Die Funktion  $f(x, y)$  besitze in einem offenen Bereiche  $B$  der  $xy$ -Ebene endliche partielle Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ . Wenn dann in den Punkten einer Teilmenge  $A$  von  $B$  die vier partiellen Ableitungen zweiter Ordnung,  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  und  $f_{yy}$ , existieren, so ist auf  $A$  fast überall  $f_{xy} = f_{yx}$ .“ J. Ridder.



**Kempisty, Stefan:** L'intégration des fonctions sommables. Ann. Soc. Polon. math. 10, 1—11 (1932).

Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften einer neuen Integraldefinition. Diese Definition ist nach Verf. mit der sog. Definition (A) von Denjoy [vgl. dies. Zbl. 3, 106 (1931)] äquivalent. Da letztere, wie neuerdings von Denjoy bewiesen wurde, mit der Lebesgueschen Integraldefinition äquivalent ist, folgen alle weiteren Sätze des Verf. unmittelbar aus der Lebesgueschen Theorie. *A. Kolmogoroff.*

## Analysis.

**Tshajkowsky, Mykola:** Über die Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen. J. Cycle math. 2, 25—38 u. dtsch. Zusammenfassung 38 (1932) [Ukrainisch].

**Cittadini, Ada:** Sulla costruzione di alcuni solidi il cui volume sia determinabile esattamente mediante la formula di Cavalieri. Period. Mat., IV. s. 13, 120—129 (1933).

**Misra, Rama Dhar:** On the expansion of  $\theta_n(h)$  in Lagrange's remainder. Tôhoku Math. J. 36, 196—205 (1933).

Für die Koeffizienten  $A_\alpha$  in der Reihe  $\theta_n = \sum h^\alpha A_\alpha$ , wo  $\theta_n$  aus dem Restgliede von Lagrange  $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta_n h)$  stammt, werden vorerst Rekursionsformeln ermittelt.

Anschließend werden die Koeffizienten  $A_0, A_1, \dots, A_5$  explizit ermittelt. Im besonderen werden für  $n = 1$  die Koeffizienten  $A_0, A_1, \dots, A_9$  angegeben. *F. Knoll.*

**Thunsdorff, Hans:** Konvexe Funktionen und Ungleichungen. Göttingen: Diss. 1932. 40 S.

Das erste Kapitel der Arbeit enthält eine Darstellung bekannter Sätze über Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften konvexer Funktionen einer Variablen. Im zweiten wird für alle im Intervall  $0 \leq x < 1$  monoton wachsenden konvexen Funktionen  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(0) = 0$  eine Darstellung durch ein Stieltjessches Integral hergeleitet, die der von Blaschke und Pick [Math. Ann. 77, 277—300 (1916)] herrührenden eng verwandt ist. Der Unterschied besteht im wesentlichen darin, daß durch etwas abweichende Wahl des Kerns auch in  $0 \leq x < 1$  unbeschränkte Funktionen mit erfaßt werden können. (Der Beweis des Verf. läßt übrigens an einer Stelle eine wesentliche Vereinfachung zu.) Im dritten Kapitel wird die folgende Verallgemeinerung einer Ungleichung von Bernstein und Krafft (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1914, 299—308) bewiesen. Es seien  $m$  und  $n$  nicht negative reelle Zahlen,  $m \leq n$ ; dann gilt für jede in  $0 \leq x \leq 1$  konvexe Funktion  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(0) = 0$

$$\left( (m+1) \int_0^1 \varphi^m(x) dx \right)^{1/m} \leq \left( (n+1) \int_0^1 \varphi^n(x) dx \right)^{1/n}.$$

Der Beweis verläuft im großen und ganzen dem Bernstein-Krafftschen Beweis des Spezialfalls  $m = 2, n = 4$  parallel. Als Anwendungen dieser Ungleichung erscheinen gewisse Ungleichungen für Momente von Verteilungsfunktionen, die teils bekannt (Gauß, Markoff, Guldberg u. a.), teils neu sind. (Einige rühren von F. Bernstein her.) — Die Arbeit enthält mehrere Unkorrektheiten, die jedoch leicht zu beseitigen sind. *W. Fenchel* (Göttingen).

**Matsumura, Sôji:** Über die Axiomatik von Mittelbildungen. Tôhoku Math. J. 36, 260—262 (1933).

Eine symmetrische Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  ist, wie man sehr einfach bestätigt, das arithmetische Mittel von  $x_1, \dots, x_n$ , wenn sie den Forderungen

$$f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n), \\ f(x, x, \dots, x) = x$$

genügt. Verf. bemerkt, daß die zweite durch  $f(1, 1, \dots, 1) = 1$  und die Forderung der Beschränktheit von  $f$  in einem den Nullpunkt enthaltenden beschränkten Bereich



ersetzt werden kann, was mit Hilfe einer bekannten Jensenschen Schlußweise gleichfalls sehr leicht eingesehen werden kann. *W. Fenchel* (Göttingen).

**Krawtchouk:** *Sur la distribution des racines des polynomes orthogonaux.* C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 739—741 (1933).

Mittels der Gauß-Jacobischen mechanischen Quadratur wird folgendes bewiesen.

Es sei  $p(x)$  in  $[0, 1]$  nichtnegativ und integrabel, ferner  $\int_0^1 p(x) dx = 1$ . Das zu der Belegung  $p(x)$  gehörige  $n$ -te Orthogonalpolynom besitze in dem Teilintervall  $[\alpha, \beta]$  von  $[0, 1]$  keine Nullstelle. Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx < \frac{p_{\alpha\beta} Q \log n + R}{n},$$

wo  $p_{\alpha\beta}$  die obere Grenze von  $p(x)$  in  $[\alpha, \beta]$ ,  $Q$  und  $R$  absolute Konstanten bezeichnen. — Weiter werden außer einer Folgerung aus diesem Satze zwei Verallgemeinerungen ausgesprochen, einerseits für Stieltjes-Belegungen, andererseits für unendliche Integrationsintervalle. Referent vermochte auf Grund der Andeutungen der Note den Beweis des obigen Theorems nicht zu reproduzieren. *G. Szegő* (Königsberg, Pr.).

**Leja, F.:** *Sur les séries de polynômes homogènes.* Rend. Circ. mat. Palermo **56**, 419—448 (1932).

En se basant sur ses résultats concernant le facteur de convergence d'une série de polynômes [C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 506—509, 767—766 (1931) ce Zbl. **2**, 336; **3**, 6; voir aussi Math. Ann. **107**, 68—82 (1932); ce Zbl. **5**, 12. Les théorèmes concernant le facteur de conv. établis dans le mémoire présent sont un peu plus généraux que les théorèmes établis dans ce dernier travail], l'auteur donne quelques résultats concernant la convergence d'une série de polynômes homogènes de plusieurs variables [voir C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 432—434 (1932); ce Zbl. **3**, 304]. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Mandelbrojt, S.:** *Sur le produit  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum \frac{a_n}{n^s}$ .* Prace mat. fiz. **40**, 143—148 (1933).

Verf. beweist: Ist  $\varphi(u)$  eine ganze, gerade Funktion mit  $\varphi(0) = 0$ ,  $|\varphi(u)| < e^{2\pi\vartheta|u|}$ ,

wo  $0 < \vartheta < 1$ , und besitzt die Dirichletsche Reihe  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\vartheta) \cdot n^{-s}$  ein absolutes Konvergenzgebiet, so gilt dort

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = F(s) + \int_0^{\infty} P(u) e^{-su} du,$$

wo  $F(s)$  eine ganze Funktion ist und  $P(u)$  sich explizit durch die  $\varphi(n)$  ausdrücken läßt.

*Hans Heilbronn* (Göttingen).

**Bochner, S.:** *Ein Satz von Landau und Ikehara.* Math. Z. **37**, 1—9 (1933).

Der von N. Wiener in der Arbeit „Tauberian theorems“ [Ann. of Math. (2) **33**, 1—100 (1932); dies. Zbl. **4**, 59] gegebene Beweis des Landau-Ikeharaschen Satzes:

„Sei  $a(x)$  nicht abnehmend für  $0 \leq x < \infty$ ,  $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\{a(x)\}$  konvergent

für  $R(s) > 1$  und konvergiert  $f(s) - 1/(s-1)$  für  $R(s) \rightarrow 1$  gleichmäßig auf jedem endlichen Intervall  $-a < J(s) < a$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} a(x) = 1$ “ wird in

vereinfachter und in mancher Hinsicht vervollständigter Fassung wiedergegeben.

*Karamata* (Beograd).

**Heilbronn, Hans, und Edmund Landau:** *Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner.* Math. Z. **37**, 10—16 (1933).

Indem der Beweis des im vorstehenden Referate angeführten Landau-Ikeharaschen Satzes weiter vereinfacht wird, erweitern zugleich die Verff. diesen Satz dadurch, daß von  $f(s)$  nur verlangt wird, daß  $f(s) - 1/(s-1)$  wenn  $\sigma \rightarrow 1$ , gleichmäßig auf  $-\lambda < t < \lambda$  konvergiert, ( $s = \sigma + it$ ), und es wird die Existenz zweier, von  $f(s)$  un-

abhängiger Funktionen  $P_1(\lambda)$  und  $P_2(\lambda)$  behauptet derart, daß  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_2(\lambda) = 1$  und  $P_1(\lambda) \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} e^{-x} a(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} e^{-x} a(x) \leq P_2(\lambda)$  ist. — In der Arbeit „Über

Dirichletsche Reihen“ (vgl. nachsteh. Titel) reduziert aber Landau die Länge des Beweises dieses Satzes auf fast eine Seite.

*Karamata* (Beograd).

**Landau, Edmund:** Über Dirichletsche Reihen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr 30, 525–527 (1932).

**Heilbronn, Hans, und Edmund Landau:** Ein Satz über Potenzreihen. Math. Z. 37, 17 (1933).

Durch Anwendung des Fatouschen Satzes (Acta math. 30, 391): Ist  $f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$  konvergent für  $|x| < 1$  und regulär in  $x=1$ , so folgt aus  $a_n = O(1)$ , daß  $\sum_{v=0}^n a_v = O(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , ist“ und des Spezialfalles  $\lambda_n = n-1$  des im obenstehenden Referate genannten Heilbronn-Landauschen Satzes (für welchen Fall aber ein direkter und sehr kurzer Beweis gegeben wird) wird der Fatousche Satz selbst erweitert, indem gezeigt wird, daß die Voraussetzung  $a_n = O(1)$  durch  $a_n > O(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , ersetzt werden kann.

*Karamata* (Beograd).

**Heilbronn, Hans, und Edmund Landau:** Anwendungen der N. Wiener'schen Methode. Math. Z. 37, 18–21 (1933).

Der im vorstehenden Referate genannte Satz über Potenzreihen wird auf Dirichletsche Reihen übertragen, indem der folgende, von M. Riesz (Acta math. 40, 350–361)

herrührende Satz die Rolle des Fatouschen Satzes spielt: „Sei  $g(s) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v e^{-\lambda_v s}$ ,  $\lambda_v < \lambda_{v-1}$ , regulär in  $s=0$ ; I. aus  $C(y) = \sum_{\lambda_n \leq y} c_n e^{\lambda_n} = O(e^y)$  (was mehr als  $c_n = O(1)$  voraussetzt), folgt  $\sum_{v=0}^n c_v = O(1)$  (dessen direkter Beweis im Anhang gegeben wird);

II. aus  $C(y) = o(e^y)$  folgt sogar die Konvergenz der Reihe  $\sum c_v$ .“ Durch Anwendung des Heilbronn-Landauschen Satzes (vgl. vorstehende Referate) ergibt sich erstens, daß in I.  $C(y) = O(e^y)$  durch  $c_n > O(1)$  ersetzt werden kann, zweitens (indem der Ikeharasche Spezialfall des genannten Satzes angewendet wird) daß in II.  $C(y) = o(e^y)$  durch  $c_n > O(1)$  und der Regularität von  $g(s)$  auf  $R(s) = 0$  ersetzt werden kann.

*Karamata* (Beograd).

**Wright, E. Maitland:** On the coefficients of power series having exponential singularities. J. London Math. Soc. 8, 71–80 (1933).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 5, 35) untersucht Verf. die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$(1-x)^{-\beta} e^{\alpha(1-x)^{-\varrho}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{für } |x| < 1,$$

wo  $\alpha, \beta$  komplex,  $\varrho > 0$  ist. Die  $c_n$  besitzen eine asymptotische Entwicklung nach verallgemeinerter Besselscher Funktion

$$\varphi(\varrho, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(\varrho n + \beta)}.$$

Diese Funktionen  $\varphi(\varrho, \beta; z)$  untersucht Verf. eingehend und findet Differential-Funktionalgleichungen mit asymptotischen Entwicklungen für große  $z$ , ganz entsprechend den Besselschen Funktionen.

*Hans Heilbronn* (Göttingen).

**Paley, R. E. A. C.:** On lacunary power series. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 271–272 (1933).

Über Potenzreihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$  mit dem Konvergenzradius Eins und den Bedingungen  $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$  ( $k=1, 2, \dots$ ),  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$ ,  $a_n \rightarrow 0$ , wird der folgende Satz ohne



Beweis mitgeteilt: Die Reihe konvergiert zu einem beliebigen Wert in einer überall dichten Punktmenge auf dem Konvergenzkreise. Ferner wird bei Fortfall der Voraussetzung  $a_n \rightarrow 0$  eine Vermutung ausgesprochen. *Otto Szász* (Frankfurt a. Main).

**Lévy, Paul:** Sur la convergence absolue des séries de Fourier. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 463—464 (1933).

The first part of the note attaches to theorems of N. Wiener (Ann. of Math., II s. 33, 1—100, esp. 10—14; this Zbl. 4, 59—60) on the representation of a function at a point or in an interval by absolutely convergent Fourier series. The author considers also the representation to the right or left of a point and finds that such a representation may exist to one side but not to the other. He mentions that if  $f(x)$  is representable at  $x_0$  (or to one side of  $x_0$ ) by such a series, the same is true of  $\varphi[f(x)]$  if  $\varphi(y)$  is holomorphic at  $y = f(x_0)$  (Wiener had the case  $\varphi(y) = 1/y$ ). The second part is concerned with the approximation of the curve  $y = f(x)$  by particular sequences of polygonal lines. The author gives a condition on the vertices of these polygons which ensures the absolute convergence of the Fourier series of  $f(x)$ . *Hille* (Princeton).

**Paley, R. E. A. C., and A. Zygmund:** On some series of functions. III. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 190—205 (1932).

Let  $\varphi_n(t)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) denote the Rademacher's functions:

$$\varphi_n(t) = \text{sign} \sin 2^{n+1} \pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

and let  $f_t(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \varphi_n(t)$  (\*). Among others the following theorems are proved.

1° If  $\sum |a_n|^2 < \infty$ ,  $z = e^{i\theta}$ , then, for almost every  $t$ , the  $N$ 'th partial sums of the series (\*) are  $o(\sqrt{\log N})$ , uniformly in  $\theta$ . 2° If  $\sum |a_n|^2 = \infty$  and  $\omega(u) \rightarrow \infty$  with  $u$ , then, for almost all  $t$ ,  $\int_0^{2\pi} \omega(|f_t(re^{i\theta})|) d\theta \rightarrow \infty$  when  $r \rightarrow 1$ . 3° For almost every  $t$  the

functions  $f_t(z)$  are not continuable across the circle of convergence. 4° Almost all the series  $\sum a_n e^{-\lambda_n s} \varphi_n(t)$  ( $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$ ,  $s = \sigma + it$ ) have the same abscissa of convergence as the series  $\sum |a_n|^2 e^{-2\lambda_n s}$  and cannot be continued across it.

*A. Zygmund* (Wilno).

**Winn, C. E.:** On the oscillation of the means of Cesàro and Riesz of the first order. J. London Math. Soc. 8, 27—32 (1933).

Gegeben sei die Folge  $s_n = \sum_0^n u_\nu$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , und die Folge  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , wobei  $\lambda_n \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_{n+1}/\lambda_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Ferner sei

$$-K \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} u_n \leq H, \quad 0 < H, K < \infty,$$

$$t_n = \sum_0^n u_\nu \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_{n+1}}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \beta, \alpha; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b, a.$$

Zu gegebenen  $\beta, \alpha$  werden die genauen Schranken für  $b, a$  bestimmt; für  $\beta = \alpha = s$  ist bekanntlich auch  $b = a = s$ . *Otto Szász* (Frankfurt a. Main).

**Obreehko, Nikola:** Una generalizzazione della sommazione di Borel. Rend. Circ. mat. Palermo 56, 449—471 (1932).

Das Cesàrosche Verfahren wird mit der von Knopp angegebenen Verallgemeinerung des Borelschen Verfahrens in ähnlicher Weise kombiniert, wie dies durch Doetsch mit dem Borelschen Verfahren selbst geschehen ist. Eine Reihe  $a_0 + a_1 + \dots$  wird  $C_\alpha B_k$ -summierbar genannt ( $\alpha \geq 0$ ,  $k$  reell), wenn die Funktion

$$f_k(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^\infty \frac{s_n x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)} \quad (a_0 + \dots + a_n = s_n)$$

( $C, \alpha$ )-limitierbar ist, d. h. wenn

$$\alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t) dt$$



mit  $x \rightarrow \infty$  einem Grenzwert zustrebt. — Für dieses Verfahren werden folgende Fragen behandelt: Verhalten gegenüber Hinzufügung neuer Reihenglieder, gegenüber Änderung der Indizes  $\alpha$  und  $k$ , gegenüber dem Cauchyschen Produkt zweier Reihen; Summabilitätsbereiche für Potenzreihen. — Die Note schließt mit einem Hinweis darauf, daß das Mittag-Lefflersche Verfahren einer ähnlichen Verallgemeinerung und einer ähnlichen Behandlung zugänglich ist, und einer kurzen Zusammenstellung der Resultate.

*R. Schmidt* (Kiel).

**Lösch, Friedrich:** Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfolgen. II. Math. Z. 37, 77—84 (1933).

En revenant à la «sommabilité  $\{A, B\}$ » [Math. Z. 34, 281—290 (1931); ce Zbl. 2, 335], l'auteur démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite  $(S_{\mu\nu})$  soit sommable  $\{A, B\}$  est que  $(1) \lim_{m, n \rightarrow \infty} |S_{m, n}| < \infty$  (voir les notations Zbl. 2, 335). Si (1) a lieu la limite de  $(S_{\mu\nu})$  et sa «limite  $\{A, B\}$ » sont égales. Dans le cas où «la sommabilité  $\{A, B\}$ » est définie par suite

$$S_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu=s}^m \sum_{\nu=s}^n s_{\mu, \nu}$$

on peut préciser le théorème précédent en n'envisageant que la «sommabilité restreinte», c'est à dire en ne considérant les  $s_{\mu\nu}$  et les  $S_{\mu\nu}$  que pour les indices tels que  $\eta_1 \mu < \nu < \eta_2 \mu$  ( $\eta_1 < \eta_2$  étant des nombres positifs quelconques) [voir Moore, Math. Ann. 74, 555—572 (1913)].

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Bochner, S.:** Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 3/4, 126—144 (1933).

Die von N. Wiener in „Tauberian theorems“ [Ann. of Math. (2) 33, 1—100 (1932); dies. Zbl. 4, 59] aufgestellten Inversionssätze der allgemeinen Limitierungsverfahren werden in übersichtlicher Weise dargelegt. Die Beweisordnung ist dem Prinzip nach dieselbe, doch bedeutend verkürzt. Dabei werden, außer dem von Wiener formulierten Satze: „Sei  $w(t)$  nicht zunehmend,  $w(t) = 1 + O(t^a)$ ,  $t \rightarrow 0$ ,

$w(t) = O(t^{-a})$ ,  $t \rightarrow \infty$ ,  $a > 0$ , und  $\lim_{\varepsilon=0} \int_0^\infty w(t) t^{\varepsilon-1+i\alpha} dt \neq 0$ ,  $-\infty < \alpha < 0$ ,

$0 < \alpha < \infty$ ; aus  $\sum_{n=0}^\infty a_n w(n/x) \rightarrow A$ ,  $x \rightarrow \infty$ , und  $a_n > O(1/n)$  folgt  $\sum_{n=0}^\infty a_n = A$ “,

noch die zwei weiteren Sätze aufgestellt: „Sei  $t^\lambda (\log t)^3 w(t) = O(1)$  bei  $t \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow \infty$ , und  $\int_0^\infty w(t) t^{\lambda-1+i\alpha} dt \neq 0$  für  $-\infty < \alpha < \infty$ ; aus

$$\sum_{n=0}^\infty a_n w(n/x) \sim A x^\lambda \int_0^\infty t^{\lambda-1} w(t) dt, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{folgt} \quad \lambda \sum_{\nu=0}^n a_\nu \sim A n^\lambda, \quad n \rightarrow \infty,$$

wenn entweder  $R(\lambda) > 0$  und  $a_n = O(n^{\lambda-1})$  ist, oder  $\lambda > 0$ ,  $w(t) > 0$  und  $a_n > 0$  ist.“ Für  $w(x) = e^{-x}$  liefern diese Sätze die bekannten Tauberschen Sätze.

*Karamata* (Beograd).

**Petersen, Richard:** Über eine Klasse von analytischen fastperiodischen Funktionen. Kopenhagen: Habilitationsschrift 1933. 94 S. [Dänisch.]

Eine reguläre analytische Funktion  $f(s) = f(\sigma + it)$  heißt nach Bohr in dem Streifen  $\alpha < \sigma < \beta$  fastperiodisch, falls sie auf jeder einzelnen Geraden  $\sigma = \sigma_0$  dieses Streifens fastperiodisch ist, und falls außerdem diese Fastperiodizität auf den unendlich vielen vertikalen Geraden in einem gewissen Sinne gleichartig ist. Es erhebt sich aber im Anschluß an diese Definition von selbst die Frage, was man von einer in einem vertikalen Streifen analytischen Funktion sagen kann, von der man nur die Fastperiodizität auf jeder vertikalen Geraden voraussetzt, ohne irgendeine Voraussetzung über Gleichartigkeit in der Fastperiodizität auf den verschiedenen Geraden



zu machen. Vor allem liegt es nahe, zu fragen, ob nicht die bloße Forderung der Fastperiodizität auf den verschiedenen Geraden schon eine gewisse Gleichartigkeit in der Fastperiodizität impliziert. Diese Frage wird in der vorliegenden Arbeit vollständig beantwortet, und zwar mit dem folgenden Ergebnis: Es gibt immer eine endliche oder abzählbare Anzahl von Teilstreifen in dem gegebenen Streifen  $\alpha < \sigma < \beta$ , worin die Funktion fastperiodisch ist, d. h. worin die Fastperiodizität auf den verschiedenen Geraden gleichartig ist; diese Teilstreifen, die man möglichst breit wählt und dann Maximalstreifen nennt, liegen in dem gegebenen Streifen überall dicht, und damit ist auch alles gesagt, was man über diese Maximalstreifen der Fastperiodizität sagen kann; in der Tat gibt es zu einem vorgegebenen Streifen  $\alpha < \sigma < \beta$  und zu vorgegebenen überall dicht liegenden (aber nicht übereinander greifenden) Teilstreifen dieses Streifens stets eine in  $\alpha < \sigma < \beta$  reguläre analytische Funktion, welche auf jeder vertikalen Geraden des Streifens fastperiodisch ist, und für welche die vorgegebenen Teilstreifen gerade die Maximalstreifen der Fastperiodizität sind. — Die erste Hälfte dieses Satzes, die die Existenz der Maximalstreifen betrifft, liegt nicht tief; die Schwierigkeiten liegen in der Konstruktion der Beispiele. Ein Hauptpunkt ist dabei die Konstruktion einer ganzen transzendenten Funktion  $f(s)$ , welche (in der Bohrschen Schreibweise) sowohl in  $(-\infty, 0)$  als in  $[0, +\infty)$  fastperiodisch ist, ohne aber in  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  fastperiodisch zu sein. Der Verf. bedient sich hierzu einer von Bohr [Math. Ann. **103**, 1—14 (1930)] herrührenden Konstruktionsmethode, welche auf der Rungeschen Polverschiebung beruht. Auf Grund dieser Methode hatte Bohr eine ganze Transzendente konstruiert, welche sowohl in  $(-\infty, 0]$  als in  $[0, +\infty)$  aber nicht in  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  fastperiodisch war. Über das Verhalten auf der Geraden  $\sigma = 0$  konnte aber nichts gesagt werden, weil die Verschiebung der Pole längs dieser Geraden stattfand. Der Verf. überwindet diese Schwierigkeit, indem er die Pole rechts von der Geraden  $\sigma = 0$  aber in immer größere Nähe dieser Geraden legt; dadurch erhält er ein Beispiel einer Funktion, welche auf jeder vertikalen Geraden fastperiodisch ist, und wo die Gerade  $\sigma = 0$  sich an die linke Halbebene anschließt. — Die Menge der Geraden, welche den Streifen der Fastperiodizität nicht angehören, kann unter Umständen endlich oder abzählbar sein, aber wird im allgemeinen von der Mächtigkeit des Kontinuums sein. Am Schluß macht der Verf. einige Bemerkungen über das (scheinbar sehr schwierige) Problem, welcher Zusammenhang zwischen den Fourierreihen der Funktion auf den verschiedenen vertikalen Geraden besteht.

B. Jessen (Kopenhagen).

### **Differentialgleichungen :**

**Biernacki, M.:** Sur l'équation différentielle  $x'' + A(t)x = 0$ . Prace mat. fiz. **40**, 163—171 (1933).

En supposant  $A(t) > 0$ ,  $A'(t) > 0$  ( $t > t_0$ ), l'auteur établit les propriétés suivantes d'une intégrale (nécessairement oscillante) de l'équation  $x'' + A x = 0$ :  $t_n$  étant les zéros de  $x(t)$  et  $z_n$  les zéros de  $x'(t)$ ,  $t_n < z_n < t_{n+1}$ , la suite  $\{|x(z_n)|\}$  est décroissante,  $\{|x'(t_n)|\}$  est croissante;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1} - t_n}{t_n - t_{n-1}} = 1$ ;  $u_n = (z_n - \frac{t_n + t_{n+1}}{2})$ :  $(t_{n+1} - t_n)$  est  $> 0$ ; on a  $\lim u_n = 0$ , sauf pour une suite d'indices exceptionnels  $\{n_i\}$  tels que la série  $\sum (t_{n_i+1} - t_{n_i})$  converge. Dans des hypothèses plus restrictives il est démontré que toute intégrale tend vers 0. La démonstration est basée sur un théorème de Borel-Nevalinna concernant les fonctions non décroissantes. W. Stepanoff (Moskau).

**Xanthakis, J.:** Sur les singularités des équations différentielles du premier ordre. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. **24**, 191—202 (1932).

L'article est consacré à la recherche des solutions particulières, holomorphes et s'annulant à l'origine, des équations

$$x(ax^k + b) \frac{dy}{dx} = \alpha y + x f(x) \quad (\alpha \neq 0, a \neq 0, b \neq 0, f(x) \text{ holomorphe pour } x=0, k=1, 2, \dots)$$

et

$$x(ax + b) \frac{dy}{dx} = \alpha y + x f(x) + lxy.$$



L'auteur écrit les séries de Taylor satisfaisant formellement à ces équations, et il recherche des conditions de convergence ainsi que des inégalités pour les valeurs des rayons de convergence. Or, ces équations étant linéaires, les formules explicites de la solution laissent immédiatement établir les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution holomorphe, et les valeurs exactes des rayons de convergence.

W. Stepanoff (Moskau).

**Marchaud, A.: Critères d'unicité et de multiplicité par les intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre.** C. R. Acad. Sci., Paris 196, 597—599 (1933).

Soit  $\frac{dx}{dt} = F(t, x)$  un système différentiel écrit sous la forme vectorielle,  $F$  étant définie et continue pour  $0 < t \leq 1$ . En introduisant une fonction scalaire  $\Phi(x)$ , positive pour  $x \neq 0$ , s'annulant pour  $x = 0$  et pourvue d'un gradient continu, sauf peut être pour  $x = 0$  (généralisation de  $|x|$ ), l'auteur donne des théorèmes de comparaison (unicité) et de multiplicité.

1. Si  $\text{grad } \Phi(x - y(t)) \cdot \{F(t, x) - F(t, y(t))\} \leq G\{t, \Phi(x - y(t))\}$

pour tout  $x$  en dehors de l'intégrale  $y(t)$ ,  $G$  étant continue pour  $0 < t \leq 1$ ,  $G(t, 0) = 0$ , alors pour toute autre intégrale  $z(t)$  on a :

$$\Phi(z(t) - y(t)) \leq U(t);$$

$U(t)$  est l'intégrale supérieure droite de l'équation  $\frac{du}{dt} = G(t, u)$ ,  $U(0) = \Phi(z(0) - y(0))$ .

2. Si  $\text{grad } \Phi(x - y(t)) \cdot \{F(t, x) - F(t, y(t))\} \geq g\{t, \Phi(x - y(t))\}$ ,

que de plus,  $\text{grad } \Phi(x) \neq 0$  sauf peut être pour  $x = 0$ , et que de l'égalité  $\Phi(x) = a$  il suit que  $|x|$  est borné, si une intégrale de l'équation  $\frac{du}{dt} = g(t, u)$ ,  $u(0) = 0$ , admet une valeur positive  $r_1$  pour  $t = t_1 \leq 1$ , alors par tout point  $(t_1, x_1)$ ,  $\Phi(x_1 - y(t_1)) \leq r_1$ , passe une intégrale aboutissant au point  $(0, y(0))$ .

W. Stepanoff (Moskau).

**Underwood, F.: An integral condition associated with linear differential equations having simply-periodic coefficients.** Tôhoku Math. J. 36, 269—274 (1933).

**Underwood, F.: A classification of certain ordinary linear differential equations having simply-periodic coefficients.** Tôhoku Math. J. 36, 275—282 (1933).

Verf. gibt eine notwendige Bedingung, damit die Gleichung

$$p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0,$$

wobei die Koeffizienten  $p_k$  periodische Funktionen mit der gemeinsamen Periode  $l$  bedeuten, eine periodische Lösung  $y$  mit der Periode  $\frac{r}{m}l$  ( $r, m$  ganze Zahlen) zuläßt. Ist  $\frac{r}{m}$  eine ganze Zahl, so ist die Bedingung auch hinreichend. Man setzt dabei voraus, daß  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ganze Funktionen sind und keinen gemeinsamen periodischen Faktor besitzen. Die Differentialgleichungen des obigen Typus werden dann nach den verschiedenen Besonderheiten, die für die Periodizität ihrer Lösungen statthaben können, klassifiziert.

G. Cimmino (Napoli).

**Underwood, F.: Systems of linear differential equations having one or more integrals in common.** Tôhoku Math. J. 36, 283—302 (1933).

Man sucht nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit mehrere lineare homogene Differentialgleichungen 2. oder 3. Ordnung eine gemeinsame, nicht identisch verschwindende Lösung besitzen. Solche Bedingungen werden als Beziehungen zwischen den Koeffizienten und deren Ableitungen ausgedrückt. Ferner berücksichtigt Verf. den Fall zweier linear unabhängigen gemeinsamen Lösungen und den Fall nicht homogener Differentialgleichungen. Die Arbeiten von G. Mammana und seinen Schülern über die Algebra der linearen Differentialoperatoren (vgl. die einschlägigen Referate dies. Zbl. 1, 2, 3, 4) sind nicht erwähnt.

G. Cimmino (Napoli).



**Winter, Jacques:** Sur une application de la théorie des perturbations de Schrödinger à un problème où la dégénérescence persiste jusqu'à l'approximation  $n$  (équation de Mathieu). C. R. Acad. Sci., Paris 196, 667—669 (1933).

Referent hat im Anschluß an eine Vermutung H. Poincarés folgenden Satz über die Mathieusche Differentialgleichung bewiesen:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2x) u = 0 \quad (1)$$

(Erg. Math. 1, H. 3, S. 23, 36). Für  $\lambda = n^2$  und  $h = 0$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) berühren sich die Grenzkurven zwischen labilen und stabilen Lösungsgebieten von (1) sich von  $(n-1)$ -ter Ordnung. Verf. bringt für diesen Satz mit Hilfe der Störungstheorie von Eigenwertaufgaben einen neuen Beweis, der außerdem ersehen läßt, daß jeder andere periodische Koeffizient an Stelle von  $\cos 2x$  zu einer Berührung niedrigerer Ordnung führen muß. (Hieraus folgt also, daß für jeden per. Koeff. die Berührung bei  $\lambda = 1$  und  $h = 0$  von nullter Ordnung sein muß. Der Ref.) M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Denjoy, Arnaud:** Sur l'intégration des différentielles totales et la métrique des courbes. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 838—841 (1933).

L'auteur introduit les notions suivantes: 1)  $u(t)$  étant définie dans  $[\alpha, \beta]$ ,  $\lim_{i=1}^n [u(t_i) - u(t_{i-1})]^2$  ( $t_0 = \alpha$ ,  $t_n = \beta$ ) pour  $\omega = \max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$  est appelée variation carrée totale de  $u(t)$  sur  $[\alpha, \beta]$ ; il existe des fonctions continues à variation carrée positive ou infinie. 2) Étant donnée une courbe  $C: x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , sa longueur quadratique  $L^{(2)} C$  est  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{M_{i-1}} \overline{M_i}^2 [M_i(x_i, y_i, z_i) \text{ correspond à } t_i]$ . 3) Un élément différentiel  $P dx + Q dy + R dz$  est intégrable sur  $C$ , si  $\lim_{i=1}^n (P(\mu_i) \Delta x_i + Q(\mu_i) \Delta y_i + R(\mu_i) \Delta z_i)$  existe (le point  $\mu_i$  correspond à  $\tau_i$ ,  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ ). Le théorème suivant est démontré: étant donnée une différentielle totale  $dU(x, y, z) = P dx + Q dy + R dz$ ,  $P, Q, R$  satisfaisant à la condition de Lipschitz, pour qu'elle soit intégrable sur  $C$ , il faut et il suffit que  $L^{(2)} C$  soit nulle.

W. Stepanoff (Moskau).

**Kerner, M.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis. Prace mat. fiz. 40, 47—67 (1932).

Eine abstrakte Funktion  $P = P(u)$  ordnet reellen Zahlen  $u$  Elemente  $P$  eines Banachschen (linearen, normierten, vollständigen) Raumes zu. Für solche Funktionen wird der Begriff des Riemannschen Integrals  $\int_{u_0}^{u_1} P(u) du$  und seine Eigenschaften übertragen. Insbesondere wird bewiesen Existenz und Eindeutigkeit einer gewöhnlichen Differentialgleichung für eine abstrakte Funktion  $P = P(u)$

$$\frac{dP}{du} = F(P, u), \quad P(u_0) = P_0 \text{ gegeben,}$$

unter einfachen Bedingungen für die Operation  $F$ , die Elementen  $P$  und reellen Zahlen  $u$  Elemente des Banachschen Raumes zuordnet.

K. Friedrichs.

**Pfeiffer, G.:** Sur l'expression d'un système des fonctions, contenant deux paramètres. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 833—835 (1933).

**Pfeiffer, M. G.:** Sur les solutions linéairement indépendantes des équations aux dérivées partielles. J. Cycle math. 2, 61—62 (1932) [Ukrainisch].

**Russyan, C.:** Intégration de l'équation aux dérivées partielles d'ordre quelconque d'une fonction inconnue aux deux variables indépendantes. Bull. Acad. Sci. USSR, VII. s. Nr 8, 1029—1061 (1932).

In this paper the author considers the problem of integrating the partial differential equation

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{01}, p_{10}, \dots, p_{0n}), \quad p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}, \quad (1)$$



by extending methods which he had previously used for the case of second order (Communications de la Société Mathématique de Kharkoff, 1928). His point of departure is from the associated set of Pfaffian equations, for which a set of integrals,

$$u_i(x, y, z, p_{01}, p_{10}, \dots, p_{0n}) = c_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad N = \frac{1}{2}n(n+1) + n, \quad (2)$$

is first to be determined. Two cases are distinguished, the first leading to a unique integral for (1) and the second to several integrals not obtainable from one another by transformations of the arbitrary constants. In the latter case the system consisting of equations (1) and (2) is said to be in involution. The two cases are distinguished from each other by the condition (1) that the functions  $u_i$  shall satisfy partial differential equations of the second order linear with respect to the second derivative of each function, or (2) the functions  $u_i$  shall satisfy partial differential equations of the first order linear with respect to each function. Most of the paper is devoted to the second case. If  $z = f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_N)$  is an integral of equation (1) and if

$$\frac{\bar{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{10} \frac{\partial}{\partial z} + p_{20} \frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{11} \frac{\partial}{\partial p_{01}} + \dots + p_{0n-1} \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}$$

and  $\bar{d}/dy$  is the corresponding expression in  $y$ , the problem is reduced to determining conditions for the proportionality of  $\bar{d}f/dx$  and  $\bar{d}f/dy$ ;  $\bar{d}f/dx$  and  $\bar{d}f/dp_{n-s,s}$  etc. The factors of proportionality in the first instance are found to be roots of the equation:

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-1,1}} - \lambda^{n-2} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} = 0,$$

and the others are similarly determined.

H. T. Davis (Bloomington).

**Kourensky, M.:** L'intégration des équations aux dérivées partielles du 2<sup>nd</sup> ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. — V. Systèmes contenant deux dérivées du second ordre, ou une seule. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 52—57 (1933).

Untersuchung eines weiteren Sonderfalls in einem vom Verf. in früheren Arbeiten berücksichtigten Problem. (Vgl. dies. Zbl. 6, 116.)

G. Cimmino (Napoli).

**Cibrario, Maria:** Prima studii intorno alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-parabolico. Rend. Circ. mat. Palermo 56, 385—418 (1932).

Ableitung von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen, die sich auf die Differentialgleichung  $y^{2k} z_{xx} - z_{yy} = 0$  beziehen. Dabei bedeutet  $k$  eine ungerade Zahl; für gerades  $k$  gelten ähnliche Sätze. Die Resultate sind für solche  $x, y$ -Gebiete neu, die mit der  $x$ -Achse Punkte gemeinsam haben, weil die Differentialgleichung dort parabolisch ist. Sie beziehen sich auf das Anfangswertproblem sowohl für nirgends charakteristische Anfangskurven als auch für überall charakteristische Anfangskurven und werden mit den im nicht ausgearteten Fall üblichen Methoden (insbesondere Riemannsche Methode) gewonnen.

Rellich (Göttingen).

**Brelot, Marcel:** Sur le problème de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 737 bis 739 (1933).

L'aut. s'occupe ici du problème de Dirichlet relatif aux fonctions harmoniques et à un ensemble ouvert et borné quelconque, le nombre des variables étant quelconque, mais il se borne pour le langage au cas de deux variables. Soit  $O$  un point irrégulier de la frontière; l'aut. considère la partie  $\gamma_r$ , intérieure au domaine donné, d'une circonférence de centre  $O$  et de rayon  $r$ , et il prend la valeur moyenne  $\mathfrak{M}_r u$  de la solution  $u$  sur  $\gamma_r$ . Il démontre que, pour toute distribution continue,  $\mathfrak{M}_r u$  a une limite quand  $r$  tend vers zéro; si la distribution atteint en  $O$  sa borne inférieure, la limite de  $\mathfrak{M}_r u$  est la plus grande limite  $\overline{u(O)}$  de  $u$  en  $O$ . L'aut. introduit aussi une définition de la quasi-limite, analogue à celle qu'il a donnée dans sa thèse (voir Zbl. 2, 259), et indique que la fonction  $u$  admet toujours une quasi-limite en  $O$ .

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).



**Hopfner, F.: Darstellung einer gebietsweise harmonischen Funktion durch eine harmonische Funktion.** (10. Tag. d. Deutsch. Geophys. Ges., Leipzig, Sitzg. v. 3.—6. X. 1932.) Z. Geophys. 9, 77—81 (1933).

Um den Schwerpunkt der Erdmasse werden zwei konzentrische Kugeln beschrieben (Radien 1 und  $R$ ), welche bzw. durch den nächstgelegenen und den weitesten Randpunkt hindurchgehen. Es handelt sich um das Potential  $V'$  in den Punkten einer konzentrischen Kugel mit dem Radius  $r$ , wo  $1 \leq r \leq R$ .  $V'$  ist nur in jenen Punkten der Kugel harmonisch, die im Außenraum der Masse liegen. Der Verf. versucht, die Funktion  $V'$  anzunähern durch eine harmonische Funktion  $V$ , indem er vorläufig eine Massenschicht, eingeschlossen von den Kugeln der Radien  $r + \varepsilon$  und  $r - \varepsilon$  entfernt. Er kommt zum Ergebnis, daß unter gewissen, nicht mathematisch genau formulierten Voraussetzungen, die Entwicklung nach Kugelfunktionen des Potentials außerhalb der Kugel  $R$ , auch sehr nahe das Potential im Bereich  $1 \leq r \leq R$  angibt. Diese Voraussetzungen sind erfüllt, wenn man Größen von der Ordnung des Quadrats der Abplattung vernachlässigt. — Eine Stütze finden die Resultate des Verf. in der experimentellen Tatsache, daß die Schwerkraftbeschleunigung in den Randpartien der Erdmasse mit der Annäherung an den Erdschwerpunkt zunimmt. O. Bottema (Groningen).

**Evans, Griffith C.: Complements of potential theory. II.** Amer. J. Math. 55, 29—49 (1933).

Sei  $u(x, y)$  summierbar im Gebiet  $T$  und längs jeder einfachen rektifizierbaren Kurve  $S$  in  $T$  (mit evtl. weiteren Einschränkungen);  $\alpha$  bezeichne eine Richtung,  $\alpha'$  die um  $\pi/2$  im posit. Sinne gedrehte. Zieht man eine solche geschlossene Kurve  $S$  auf einen Punkt  $P_0$  im Innern  $J$  so zusammen, daß  $\sigma/d^2 \geq \text{konst.} > 0$  bleibt,  $\sigma = mJ$ ,  $d$  ihr Durchmesser, und existiert dabei

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_{(S)} u d\alpha' = D_\alpha u(P_0) \quad \left( \frac{d\alpha'}{ds} = \frac{dx}{ds} \cos(x, \alpha') + \frac{dy}{ds} \cos(y, \alpha') \right), \quad (1)$$

so heißt dieser die verallgemeinerte Ableitung von  $u$  in der Richtung  $\alpha$ . [Ist  $u(x, y)$  stetig in  $x, y$ , so ist die Existenz von (1) für jedes  $\alpha$  äquivalent mit der Totalstetigkeit von  $u$  in  $x$  und  $y$  im Sinne von Tonelli — Anhang I]. Hiermit verallgemeinert Verf. die Poissonsche Differentialgleichung ( $\Delta u = f(x, y)$ ): Für „fast alle“  $S$  einer Kurvenklasse  $K$  gelte

$$\int_{(S)} D_n u ds = \Phi(\sigma), \quad (D_n u = \text{verallgemeinerte Normalableitung}), \quad (2)$$

wo  $\Phi(e)$  eine absolut additive Mengenfunktion von nach Borel meßbaren Mengen  $e$  („Massenbelegung“) ist. „Fast alle“ bedeutet: alle  $S$  aus  $K$ , die nicht Teile von positivem linearen Maß einer gewissen Menge vom 2-dimensionalen Maß 0 enthalten;  $K$  = Gesamtheit der  $S$  aus endlich vielen Bögen mit stetiger Tangente, längs denen

$$\int_{(S)} \frac{|\cos(n_P, MP)|}{MP} ds_P < \Gamma \quad (\Gamma \text{ von } M \text{ freie Konstante) gilt, wo } (n_P, MP)$$

der Winkel zwischen der Normalen  $n_P$  in  $P$  und  $\overline{MP}$ ,  $M$  ein beliebiger Punkt (also auch auf  $S$ ) ist. Insbesondere gehört die Klasse  $(\alpha)$  mit  $|(n_Q, n_P)| \leq \alpha s$  ( $\alpha$  konst.,  $s$  die kürzere Bogenlänge auf  $S$  zwischen  $Q, P$ ) zu  $K$ . — Ein Kurvenpaar  $S, S'$  gehört zu  $(\beta)$ , wenn beide zu  $(\alpha)$  gehören und außerdem  $|(n_P, n'_Q)| \leq \alpha \overline{PQ}$  gilt ( $n_P$  Normale von  $S$  in  $P$ ,  $n'_Q$  die von  $S'$  in  $Q$ ). Eine Kurvenschar  $\{S\}$  heiße normal, wenn je zwei Kurven zu  $(\beta)$  gehören (mit für alle  $S$  gleichem  $\alpha$ ) und in jeder Folge eine gegen eine Kurve der Schar „konvergierende“ Teilfolge existiert. —  $V(M) = \int \int_{(T)} \lg \frac{1}{MP} d\Phi(e_P)$  existiert fast

überall und ist, wie Verf. früher zeigte, Lösung von (2). Weitere hier bewiesene Eigenschaften sind: 1. Für  $S$  aus  $(\alpha)$  strebt für f. a.  $Q$  auf  $S$ :  $V(M) \rightarrow V(Q)$  bei  $M \rightarrow Q$  auf  $n_Q$ . 2. Für f. a.  $y(x)$  ist  $V(x, y)$  totalstetig in  $x(y)$  und  $\partial V / \partial x = D_x V$ ,  $\partial V / \partial y = D_y V$  f. ü. 3. Für eine normale Kurvenschar  $\{S\}$  ist  $\int_{P_0(S)} V(M) ds$  gleichartig totalstetig,

$\int_{(S)} |V(M)| ds$  gleichmäßig beschränkt. 4. Alle  $S$  einer normalen Kurvenschar mögen innerhalb (außerhalb) der dazugehörigen Kurve  $S_0$  liegen und gegen  $S_0$  „konvergieren“. Für f. a.  $S$  (s. oben) bleibt  $\int_{(S)} |D_n V| ds$  gleichmäßig beschränkt, ferner gilt, wenn  $A, B$  auf  $S$ ,  $A_0, B_0$  die Grenzpunkte bei  $S \rightarrow S_0$  auf  $S_0$  sind,

$$\lim_{(AS)} \int_A^B D_n V ds = \mp (\mu(B) - \mu(A)) + \int_{A_0(S_0)}^{B_0} ds_Q \int_{(T)} \frac{\cos(QP, n_Q)}{QP} d\Phi(e_P),$$

wo  $\mu(P)$  die Massenbelegung auf  $S_0$  von beschränkter Schwenkung mit

$$\mu(P) = \frac{1}{2} (\mu(P+0) + \mu(P-0))$$

ist und das  $\mp$ -Zeichen gilt, wenn  $S$  innerhalb (außerhalb)  $S_0$  liegen. — Anwendung findet dies zur Lösung der 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie mit nicht notwendig stetigen Randwerten, sowie der verallgemeinerten Neumannschen Aufgabe [längs der Randkurve  $S_0$   $F(M)$  von beschränkter Schwkg. gegeben; gesucht ein im Innern von  $S_0$  harmonisches  $u(M)$ , so daß für eine  $S_0$  „approximierende“ normale Kurvenschar  $(S) \lim_{M_0(S)} \int_M^M D_n u ds = F(M)$  ist] (vgl. dies. Zbl. 4, 151). *S. Warschawski.*

● **Hadamard, J.:** *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Paris: Hermann & Cie. 1932. 542 S. Frs. 100.—.

**Ignatovskij, V.:** *Wellenfortpflanzung und Beugung in inhomogenen isotropen Medien.* Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 9, 1203—1218 (1932).

Fortsetzung einer früheren Veröffentlichung des Verf. [Bull. Acad. Sci. URSS, 7, Nr 7, 857 (1932); dies. Zbl. 6, 117]. Zunächst wird der statische Fall betrachtet und eine Greensche Formel für inhomogene isotrope Medien aufgestellt. Für zeitlich periodische Vorgänge in derartigen Medien werden dann partikuläre Integrale (Grundlösungen) der Wellengleichung bei verschiedenen Brechungsexponenten sowie das Kirchhoffsche Integral angegeben. Hieran schließt sich die Berechnung der Beugung an einem Objektiv unter den auch bei homogenen Medien üblichen Vereinfachungen.

*Harry Schmidt* (Köthen).

**Buhl, A.:** *Tourbillons, corpuscules, ondes avec quelques préliminaires sur le rôle des opérateurs en physique théorique.* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 24, 1—48 (1932).

Im Anschluß an frühere Arbeiten desselben Verfassers, die S. 2 angegeben sind, wird eine Übersicht über verschiedene Operationen gegeben, die mit den mathematischen Hilfsmitteln der theoretischen Physik in einem gewissen Zusammenhang stehen. So werden im ersten Abschnitt eine Reihe von Sätzen entwickelt bezüglich der Vertauschbarkeit und Nichtvertauschbarkeit von linearen Differentialausdrücken, während der zweite Abschnitt von verschiedenen geometrischen Anwendungen eines verallgemeinerten Stokeschen Integraltheorems handelt.

*O. Klein* (Stockholm).

**Théodoresco, N.:** *Sur l'emploi de relations globales dans quelques problèmes physiques.* Ann. Mat. pura appl., IV. s. 11, 325—362 (1933).

Es soll gezeigt werden, daß man bei Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen manchmal weniger einschränkende Bedingungen benötigt, wenn man Differentialrelationen durch Integralbeziehungen ersetzt. Das wird an speziellen Problemen der Mechanik der Kontinua demonstriert. — Zunächst werden die Gleichgewichtsbedingungen eines ebenen Mediums behandelt, wobei von den Kraft- bzw. Spannungskomponenten Differenzierbarkeit nicht vorausgesetzt wird. Man erhält üblicherweise für das Gleichgewicht zwei Gleichungen zwischen Gebietsintegralen über einen beliebigen Teilbereich und Kurvenintegralen über dessen Rand. Vermöge der Greenschen Formel ergeben sich dann unmittelbar die bekannten Differentialgleichungen. Unter den hier gemachten allgemeinen Voraussetzungen ist



aber die Greensche Formel nicht anwendbar: an Stelle der Differentialgleichungen sind daher zwei Funktionalgleichungen in Integralform zu behandeln. Durchgeführt wird die Rechnung nur für Spezialfälle aus der Elastizitätstheorie. In diesen erhält man durch Einführung komplexer Hilfsgrößen eine Gleichung; die Differenz zweier Lösungen dieser Gleichung ist nach dem Satz von Morera regulär. Das Problem reduziert sich daher auf die Bestimmung einer partikulären Lösung und eine funktionentheoretische Aufgabe bekannter Art. (Die Methode ist ein Spezialfall aus der These des Verf.; vgl. dies. Zbl. 3, 206). — Im Raume wird das Problem der Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten durch das Rotationsfeld behandelt. Vom letzteren wird aber nicht die Quellenfreiheit vorausgesetzt, sondern die Divergenz braucht nicht zu existieren: das Flächenintegral über die Normalkomponente, erstreckt über jede geschlossene Fläche, soll verschwinden, und die Komponenten des Feldes sollen einer Hölderschen Bedingung genügen. Hier bleibt also ein System von Differentialgleichungen, und nur eine Nebenbedingung wird verallgemeinert. Das Gleichungssystem wird auf ein anderes zurückgeführt, das gewisse Ähnlichkeiten mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen hat (insbesondere die Gültigkeit des Moreraschen Satzes. Das System wurde bereits vom Verf. und C. Moisil behandelt, vgl. dies. Zbl. 2, 274). Die Lösung wird wieder durch gewisse Potentiale dargestellt. Kenntnis der zitierten Arbeiten wird nicht vorausgesetzt. *Willy Feller* (Kiel).

### Spezielle Funktionen:

**Dinnik, A.: Tafeln der Besselschen Funktionen von der gebrochenen Ordnung.** Allukrain. Akad. Wiss. 1—29 (1933). [Ukrainisch.]

In den Tafeln I, II, V, VIII sind die Werte der Besselschen Funktionen  $J_n(x)$  bei  $\pm n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$  für reelle, in Tafeln I, IV, VII, X für imaginäre Argumente und in den Tafeln III, VI, IX die ersten fünf Wurzeln  $a_n$  dieser Funktionen gegeben. Endlich in der Tafel XI § 12 sind die Funktionen  $J_n(x)$ , als Funktionen des Parameters  $n$  für einige Werte der unabhängigen Veränderlichen  $x$  bei reellem  $x$  und in der Tafel XI bei imaginärem  $x$  gegeben. *Auszug.*

**Bursian, V., and V. Fock: Tables of the functions  $\int_x^\infty K_0(x) dx$ ,  $\int_0^x I_0(x) dx$ ,  $e^x \int_x^\infty K_0(x) dx$ ,  $e^{-x} \int_0^x I_0(x) dx$ .** Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 2, Nr 1, 1—10 (1931).

Hierin ist:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+2r}}{r!(n+r)!};$$

$$K_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \{I_{-\varepsilon}(x) - I_{+\varepsilon}(x)\} \cot \pi \varepsilon.$$

(Watson, Bessel Functions. Cambridge 1922.) — Die Tafel von  $\int_0^x I_0(x) dx$  geht von 0,0 bis 6,0 aufsteigend durch alle Zehnteile und ist berechnet in 8 bzw. 7 Dezimalen mittels mechanischer Quadratur. — Die anderen Tafeln gehen von 0,0 bis 12,0 aufsteigend durch alle Zehnteile in 7 und mehr Dezimalen. Der Verf. gibt noch eine asymptotische Entwicklung für  $\int_x^\infty K_0(x) dx$  mit Restglied. *S. C. van Veen* (Dordrecht).

**Hodgkinson, J.: A class of triangle-functions. II.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 21—36 (1933).

Fortsetzung der Untersuchung derjenigen Funktionen  $w(u)$  (dies. Zbl. 5, 67), welche Gleichungen der Form

$$w(u') = \frac{Aw(u) + B}{Cw(u) + D}$$

genügen, in dem Falle, wo  $u'(u)$  die Substitutionen einer Polyedergruppe oder einer zur konformen Abbildung eines geradlinigen Dreiecks gehörigen Gruppe durchläuft.

*Myrberg* (Helsinki).

**Walfisz, Arnold:** Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen. Math. Ann. 108, 75—90 (1933).

Es sei  $F(\tau)$  eine ganze Modulform  $N$ -ter Stufe von der Dimension  $-k \leq -2$ , welche in allen parabolischen Spitzen verschwindet. Ist  $F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}}$  die Fourierentwicklung dieser Modulform, so untersucht Verf. die Koeffizientensummen  $C(x) = \sum_{n \leq x} c_n$ . Er beweist zunächst  $C(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - \frac{1}{24} + \varepsilon}\right)$ ,  $\varepsilon > 0$ , ein Resultat, welches auf Grund neuerer Untersuchungen von H. Salié sofort zu  $C(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - \frac{1}{18} + \varepsilon}\right)$  verschärft werden kann. Zum Beweise dient eine Landausche Methode: es wird vorerst die absolut konvergente Reihenentwicklung

$$\frac{1}{6} \sum_{n \leq x} c_n (x - n)^3 = (-i)^k \left(\frac{N}{2\pi}\right)^3 x^{\frac{k+3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} J_{k+3} \left(\frac{4\pi}{N} \sqrt{nx}\right) \quad (1)$$

aufgestellt; dabei wird von der Tatsache, daß für  $\tau F(\tau)$  eine Fourierentwicklung  $\tau F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i \frac{-n}{N\tau}}$  existiert, und von der Sonineschen Integraldarstellung der Besselschen Funktionen erster Art Gebrauch gemacht. Von (1) ausgehend gelangt Verf. durch Bildung der dritten Differenz beim Fortschreiten um  $x^{\frac{1}{12}}$  und unter Benutzung des Kloostermanschen Resultats  $c_n = O\left(n^{\frac{k}{2} - \frac{1}{8} + \varepsilon}\right)$  zu der gewünschten Abschätzung. — Wesentlich schwieriger ist der Beweis der Aussage

$$\int_0^x |C(u)|^2 du = \lambda x^{k+\frac{1}{2}} + O(x^k \log^2 x), \quad (2)$$

wo  $\lambda$  eine gewisse positive nur von  $F(\tau)$  abhängige Konstante bezeichnet. (Aus (2) folgt  $C(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}}\right)$ .) Aus (1) ergibt sich zunächst durch zweimaliges Differenzieren die absolut konvergente Entwicklung

$$\sum_{n \leq x} c_n (x - n) = (-i)^k \frac{N}{2\pi} x^{\frac{k+1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} J_{k+1} \left(\frac{4\pi}{N} \sqrt{nx}\right). \quad (3)$$

Bezeichnet  $\Delta$  die erste Differenz beim Fortschreiten von  $x$  um 1 und  $\Phi(x)$  den Ausdruck

$$\Phi(x) = x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}} \Delta \cos \left(\frac{4\pi}{N} \sqrt{nx} + \alpha\right)$$

mit einem gewissen nur von  $F$  abhängigen reellen  $\alpha$ , so besteht die Hauptschwierigkeit in dem Nachweis, daß für ein gewisses, nur von  $F(\tau)$  abhängiges  $\lambda_1 > 0$

$$\int_0^x |\Phi(u)|^2 du = \lambda_1 x^{k+\frac{1}{2}} + O(x^k \log^2 x).$$

Man sieht, daß  $\Phi(x)$  aus der rechten Seite von (3) entsteht, indem für die Besselsche Funktion das höchste Glied ihrer asymptotischen Entwicklung eingetragen und dann die Differenz an dem einen der beiden von  $x$  abhängigen Faktoren gebildet wird. In der Tat zeigt eine genauere Überlegung, daß, von konstanten Faktoren abgesehen,

$\int_0^x |\Phi(u)|^2 du$  das fragliche Integral  $\int_0^x |C(u)|^2 du$  mit der gewünschten Genauigkeit  $O(x^k \log^2 x)$  approximiert.

Petersson (Hamburg).



Walfisz, A.: Über die Koeffizienten einiger Modulformen. *Prace mat. fiz.* **40**, 149—155 (1933).

Ist  $M(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}}$  eine ganze Modulform von der Dimension  $-2$  und der Stufe  $N$ , welche nicht in allen parabolischen Spitzen verschwindet, so gilt nach E. Hecke [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **5**, 199—224 (1927)],

$$a_n = n \sum_{d|n} f\left(d, \frac{n}{d}\right) \frac{1}{d} + O(n),$$

wo die zahlentheoretische Funktion  $f(\alpha, \beta)$  von  $\alpha, \beta$  je nur mod  $N$  abhängt und außerdem gegen simultanen Vorzeichenwechsel von  $\alpha$  und  $\beta$  invariant ist. Der Ausdruck

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{d|n} f\left(d, \frac{n}{d}\right) \frac{1}{d}$$

verschwindet nicht für alle  $n$ . Verf. beweist, daß bei gegebenem  $M(\tau)$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= O(n \log \log n), & a_n &= \Omega(n \log \log n) \quad \text{für } N = 1, 2, \\ a_n &= \Omega(n (\log \log n)^{2/\varphi(N)}) \quad \text{für } N > 2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gilt. Zum Beweise der  $\Omega$ -Aussage wird  $\mathfrak{S}(n)$  elementar umgeformt, und es wird benutzt, daß (Landau, Handbuch)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^h \frac{1}{q_i} &= \frac{1}{\varphi(N)} \log \log q_h + \gamma_1 + o(1), \\ \sum_{i=1}^h \frac{1}{q'_i} &= \frac{1}{\varphi(N)} \log \log q'_h + \gamma_2 + o(1), \end{aligned}$$

wenn  $q_i$  die wachsend geordneten Primzahlen  $\equiv 1 \pmod{N}$ ,  $q'_i$  die wachsend geordneten Primzahlen  $\equiv -1 \pmod{N}$  durchläuft,  $\gamma_1, \gamma_2$  gewisse Konstante bezeichnen. — Die Abschätzungen (1) sind für die 5 Werte  $N = 1, 2, 3, 4, 6$  endgültig. *Petersson*.

### Integralgleichungen und Verwandtes:

Germay, R.-H.-J.: Application de la méthode des approximations successives au calcul de l'intégrale d'une équation intégrale-différentielle. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **2**, 51—57 (1933).

Die Funktionen  $F_\mu(x, y; u_1, \dots, u_p)$  und  $f_{i,\mu}(x, s; y)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) mögen in einem gewissen Bereich der Argumente gleichmäßig gegen Grenzfunktionen  $F_\infty$  bzw.  $f_{i,\infty}$  streben. Unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die Funktionen der Folgen wird die Integrodifferentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F_\infty \left[ x, y; \int_{x_0}^x f_{1,\infty}[x, s; y(s)] ds, \dots, \int_{x_0}^x f_{p,\infty}[x, s; y(s)] ds \right]$$

unter Benutzung der konvergenten Funktionenfolgen durch sukzessive Approximation gelöst. R. Iglisch (Aachen).

Sanielevici, S.: Sur certaines équations intégrales. *Bul. Soc. şti. Cluj* **7**, 1—12 (1932).

The author discusses various integral equations such that  $K(x, y) = \alpha k(x, \alpha y)$ , where  $k(y, x) = k(x, y)$  and  $\alpha$  is real,  $|\alpha| \leq 1$ . His generalization of Picard's equation, viz.,

$$\varphi(x) - \frac{\lambda \alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\alpha y|} \varphi(y) dy = f(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

is particularly interesting. There is a point spectrum  $\lambda = \alpha^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , and a continuous spectrum  $|\lambda| > \alpha$  [not  $|\lambda| > 1$  as stated by the author]. The non-homogeneous equation can have bounded solutions for all finite values of  $\lambda$ . Hille.



Niemytzki, V.: Sur les équations intégrales non linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 836—838 (1933).

Der Verf. untersucht nichtlineare Integralgleichungen

$$(1) \varphi(x) = \int_F K(x, y) f[y, \varphi(y)] dy \quad \text{bzw.} \quad (2) \varphi(x) = \lambda \int_F K(x, y) f[y, \varphi(y)] dy.$$

Dabei sind  $x, y$  Punkte eines euklidischen  $n$ -dimensionalen Raumes und  $F$  eine Menge dieses Raumes, von der nur ihre Abgeschlossenheit vorausgesetzt wird. Folgende Sätze werden bewiesen. Satz I. Ist a)  $\int_F K^2(x, y) dx < C_1$ , b)  $\int_F K^2(x, y) dy < C_1$ ,

$$c) \int_F \sup_{|u(x)| \leq K} f(x, u) < C_2, \text{ d) } \sqrt{C_1 C_2} \leq K, \text{ so gibt es wenigstens eine Lösung } \varphi(x) \text{ von (1)}$$

mit  $|\varphi(x)| \leq K$ , sobald nur  $f(x, u)$  für  $x \in F, |u| \leq K$  stetig bleibt. Satz II bringt das Analogon des Satzes I für Gleichung (2), während sich Satz III mit dem Falle einer eindeutig bestimmbar Lösung beschäftigt. Als Hilfsmittel werden gewisse Fixpunktsätze in Funktionalräumen benutzt [in der vom Verf. benötigten Form bei Schauder, *Studia Math* 2, 170—179 (1930), Satz II] sowie ein Kriterium von Kolmogoroff (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1931, 60—63) für die Kompaktheit einer Menge im Hilbertschen Raume. [Vgl. dies. Zbl. 2, 385 (Kolmogoroff).] Schauder (Leipzig).

Gleijeses, M.: Sulla teoria della „scia“ nei liquidi perfetti. — Caso del cilindro rotondo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 435—438 (1932).

In einer Arbeit mit demselben Titel (Zbl. Math. 3, 276) hat A. Quarleri einen bemerkenswerten Versuch gemacht, die Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen auf das Problem der diskontinuierlichen Strömung um einen kreisförmigen Widerstand anzuwenden. Verf. stellt durch eine Probe fest, daß die Schlußformel (11) von Quarleri nicht die Lösung des Problems ist.

Ref. hat der Kritik des Verf., die selber einige Unklarheiten enthält, folgendes hinzufügen: Die Arbeit von Herrn Quarleri enthält im wesentlichen folgende anfechtbare Stellen: 1. Die Hammersteinschen Sätze sind auf die Integralgleichung (3'') nicht anwendbar, weil der Kern nicht positiv ist. Daher muß ein anderer, vom Ref. benutzter Ansatz zur Verwendung gelangen. 2. Die Rekursionsformeln (8) sind unrichtig. 3. Herr Quarleri und Herr Gleijeses übersehen, daß der Ansatz des Problems einen Parameter enthält, welcher die Lage der unbekannten Ablösungsstellen bestimmt. Weinstein (Breslau).

Haar, Alfred: Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 21—40 (1933).

Es sei  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$  ein in einer Menge  $\mathfrak{M}$  definiertes unitär-orthogonales beschränktes vollständiges Funktionensystem

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \bar{\varphi}_q(s) ds = \delta_{pq} \quad p_1 q = 1, 2, \dots$$

$$|\varphi_p(s)| \leq M_p.$$

Dann bilden die Zahlen

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \varphi_q(s) \bar{\varphi}_r(s) ds$$

die Multiplikationstabelle dieses Systems, mit deren Hilfe sich  $\varphi_p \varphi_q$  im Mittel approximieren läßt durch

$$\varphi_p(s) \varphi_q(s) \approx \sum_{r=1}^{\infty} c_{pqr} \varphi_r(s).$$

Es werden folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß ein Zahlensystem  $c_{pqr}$  Multiplikationstabelle eines solchen Funktionensystems ist.

I. Es ist  $c_{pqr} = c_{qpr}$ . — II. Die unendlich vielen Bilinearformen  $p = 1, 2, \dots$

$$C_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta}, \quad \bar{C}_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \bar{c}_{p\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta}$$

sind beschränkt und vertauschbar. — III. Es existiert ein Wertsystem  $e_1, e_2, \dots$  mit

konvergentem  $\sum_{k=1}^{\infty} |e_k|^2$ , so daß sich die Einheitsmatrix  $E$  in der Form darstellen läßt

$$E = e_1 C_1 + e_2 C_2 + \dots$$



## IV. Die homogenen Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_{\beta} = \mu_p x_{\alpha} \quad p, \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

besitzen für kein Zahlensystem  $\mu_p$  ein gemeinsames Lösungssystem mit konvergentem  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ . — Die vierte Bedingung fällt fort, wenn nur gefordert ist, daß das System der  $\varphi_p(s)$  in sich abgeschlossen ist; d. h. daß an Stelle einer beliebigen Funktion  $f(s)$  nur die  $\varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}, \varphi_{\alpha} \bar{\varphi}_{\beta}, \bar{\varphi}_{\alpha} \varphi_{\beta}, 1$  durch lineare Kombinationen der  $\varphi_p$  im Mittel approximiert werden können. — Zu den Beweisen ist besonders zu bemerken, daß der Nachweis der Hinlänglichkeit der obigen Bedingungen auf dem Satz von der simultanen Spektralzerlegbarkeit einer Folge vertauschbarer Matrizen beruht. *K. Friedrichs.*

**Delsarte, J.:** Sur les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 37—40 (1931).

The linear continuous transformations are on the space of  $L^2$  functions to  $L^2$  functions. By posing an invariance problem, the author is led to the consideration of transformations  $A$  such that if  $S$  is a given symmetric transformation ( $\int f S(g) = \int g S(f)$ ) then the transformation  $AS$  is skew symmetric ( $\int f AS(g) = -\int g AS(f)$ ). If  $A$  and  $B$  belong to the set so does  $C = AB - BA$ . The values  $\varrho$  such that  $AB - BA = \varrho B$  are of the form  $\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}$  where  $\lambda$  and  $\lambda'$  are characteristic values of  $A$ . Application is made to the Fredholm group  $A(s) = \int_a^b h(st) f(t) dt$ . *Hildebrandt (Ann Arbor).*

**Delsarte, Jean:** Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert. Mém. Sci. math. Fasc. 57, 1—59 (1932).

Der Hilbertsche Raum wird als der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen im endlichen Intervall erklärt und es werden die grundlegenden Tatsachen über lineare Funktionaltransformationen dargestellt. Der Satz von der Beschränktheit der Normen einer schwach konvergenten Folge wird nach A. Weil einfach bewiesen. — Die Gruppen linearer Transformationen, die sodann betrachtet werden, sind von der Form  $E + A$  mit vollstetigem  $A$ . Insbesondere werden diejenigen Transformationen  $A$ , die eine gegebene quadratische oder Graßmannsche Form invariant lassen, gekennzeichnet und ausführlich untersucht. *K. Friedrichs (Braunschweig).*

**Cartan, Henri:** Sur les groupes de transformations pseudo-conformes. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 669—671 (1933).

Im Raume der komplexen Variablen  $z_1, \dots, z_p$  liege eine Gruppe  $G$  von pseudo-konformen Transformationen  $z'_j = \varphi_j(z_1 \dots z_p; t_1 \dots t_r)$  ( $j = 1, 2 \dots p$ )

vor, wobei die  $\varphi$  von  $r$  reellen Parametern  $t$  abhängen, als Funktionen von  $z, t$  in der Umgebung von  $z = t = 0$  gleichmäßig beschränkt sind und für jedes Wertsystem der  $t$  reguläre Funktionen der  $z$ , für jedes Wertsystem der  $z$  stetige Funktionen der  $t$  darstellen. Ist dann die Parametergruppe Liesch, so ist  $G$  selbst eine Liesche Gruppe. Zum Beweise betrachtet Verf. eine eingliedrige Gruppe  $z'_j = \varphi_j(z_1, \dots, z_p, t)$ , wo der Parameter  $t$  in einem passenden Intervall sich additiv verhält, und zeigt, daß sich unter den Fourierkoeffizienten der Entwicklung von  $\varphi_j$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$   $p$  solche Koeffizienten

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_j(z; \theta) e^{-in_j\theta} d\theta \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

finden lassen, daß die Determinante  $\frac{\partial(f_1 \dots f_p)}{\partial(z_1 \dots z_p)}$  für  $z = 0$  von Null verschieden ist. Mit  $Z_j = f_j(z)$  als neuen Variablen ergibt sich aber für  $Z'_j$  eine solche Darstellung, daß die Analytizität der Ableitungen  $\frac{dZ'_j}{dt}$  für  $t = 0$  unmittelbar sichtbar wird, womit der obige Satz bewiesen ist. *Kähler (Hamburg).*

## **Funktionentheorie:**

● **Julia, Gaston:** Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes. Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1933. VIII, 53 S. Frs. 12.—.

**Lösch, Friedrich:** Über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises. III. Math. Z. 37, 85—89 (1933).

L'auteur rectifie son théorème établi dans un travail précédent [Math. Z. 33, 791—795 (1931); ce Zbl. 2, 33]. Il donne aussi un nouvel exemple d'une série entière qui converge uniformément mais non absolument sur le cercle de convergence.

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Aronszajn, N.:** Sur les décompositions des fonctions uniformes. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 672—674 (1933).

L'auteur discute des applications diverses de son théorème général sur les décompositions d'une fonction analytique attachées à des décompositions de l'ensemble de singularités de cette fonction. On peut se servir de ce théorème dans l'étude des singularités des transformés d'une fonction entière obtenus par certaines opérations fonctionnelles additives; la méthode de sommation de Borel-Pólya est considérée à titre d'exemple. — L'application du théorème général aux fonctions multiformes donne, en particulier, l'énoncé suivant: Si deux fonctions analytiques multiformes n'ont qu'un seul point singulier commun, ce point sera singulier aussi pour leur somme, excepté le cas d'un pôle, d'un point singulier isolé, d'un point critique logarithmique simple ou encore le cas où la fonction se décompose en deux parties, dont chacune présente une de ces singularités. — Ensuite, l'auteur fait observer que son théorème sur les décompositions des fonctions analytiques peut être étendu aux fonctions harmoniques et même à certaines classes plus larges des fonctions. *Saks* (Warszawa).

**Landau, Edmund:** Über ungerade schlichte Funktionen. Math. Z. 37, 33—35 (1933).

L'auteur simplifie la démonstration du théorème de Littlewood et Paley [Lond. Math. Soc. 7, 167—169 (1932); ce Zbl. 5, 18], d'après lequel il existe une constante  $p$  telle que pour toute fonction  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1}$  ( $a_0 = 1$ ), univalente dans  $|z| < 1$  on a  $|a_n| \leq p$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Minetti, S.:** Un teorema generale sulle successioni di funzioni convergenti verso una funzione olomorfa. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 58—61 (1933).

A condition is established in order that a sequence of continuous functions given in an open region  $C$  should converge to a holomorphic function. The argument of the proof seems to be very simple. However the referee has not been able to find out the purpose of the very special assumptions about the nature of the boundary of the region  $C$ , and to understand clearly the sense of some other conditions of the theorem. *Saks*.

**Viola, T.:** Una proprietà degli aggregati perfetti di punti, utile nello studio delle famiglie non normali di funzioni olomorfe. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 287—290 (1932).

Das mengentheoretische Beweisstück eines Normalfamiliensatzes, der auf dem Züricher Int. Mathematikerkongreß mitgeteilt wurde, wird ausgeführt. *Ullrich*.

**Montel, Paul:** Sur les séries de fractions rationnelles. Publ. math. Univ. Belgrade 1, 157—169 (1932).

Bericht über neuere Fragen in der Theorie der Normalfamilien; eingestreut einige neue Beweise und Sätze. So ein einfacher Beweis des Satzes von Osgood: Konvergiert eine Folge meromorpher Funktionen  $f(z)$  in jedem Punkt eines Gebiets  $\mathfrak{G}$ , so existiert ein Teilbereich gleichmäßiger Konvergenz; ferner eine Erweiterung dieses Satzes über Familien mer. Funktionen, indem vorausgesetzt wird: In jedem Punkte  $z$  von  $\mathfrak{G}$  umfasse die Ableitung der Wertmenge  $\{f(z)\}$  (der sog. Häufungsbereich) nicht die ganze Riemannsche Kugel. Dann kann man aus jeder unendlichen Teilmenge der Familie eine Folge auswählen, für welche die Punkte glm. Konvergenz überall dicht in  $\mathfrak{G}$  liegen. In Anwendung auf die Wertverteilung einer mer. Funktion bedeutet dies: Enthält ein Winkelraum keinen Halbstrahl, dessen Häufungsbereich die Vollkugel ist, so ent-



hält er auch keine Juliasche Richtung; und umgekehrt: Sind alle Richtungen eines Winkelraums juliasch, so liegen jene Halbstrahlen überall dicht. — Schließlich zwei Kriterien für normale bzw. quasinormale Familien, die sich auf Beschränktheitsannahmen über den Inhalt des Riemannschen Flächenstücks stützen, welches  $f(z)$  als Bild von  $\mathfrak{G}$  (über der Einheitskugel) entwirft. Sie gestatten eine geometrische Deutung gewisser Wertverteilungseigenschaften, die von Ostrowski und Saxer untersucht sind.

Ulrich (Marburg, Lahn).

**Srivastava, P. L., and S. P. Jain:** On a generalization of a theorem of Wigert. Bull. Acad. Sci. Allahabad 1, 104–109 (1932).

Die Dirichletsche Reihe  $h(s) = \sum a_n e^{-s \lambda_n}$  sei für  $\sigma > 0$  konvergent; es sei  $f(z) = \sum b_n z^n$  eine ganze Funktion vom Typus  $\tau \geq 0$  der Ordnung 1; unter diesen und gewissen weiteren Annahmen wird die Konvergenz und funktionentheoretische Natur der Reihe  $H(z) = \sum a_n f(\lambda_n z)$  studiert; insbesondere genügen ihre Singularitäten einem Analogon des Hadamardschen Multiplikationssatzes in bezug auf die Singularitäten von  $h(s)$  und der zu  $f(z)$  assoziierten Funktion  $a(z) = \sum n! b_n z^n$ . Für  $\tau = 0$  ist diese, also auch  $H(z)$  ganz; hierin ist ein schöner Satz von Wigert enthalten.

Ulrich (Marburg, Lahn).

**Whittaker, J. M.:** The lower order of integral functions. J. London Math. Soc. 8, 20–27 (1933).

Es wird gezeigt, daß es zweckmäßig ist, neben dem gewöhnlichen Begriff der (oberen) Wachstumsordnung einer ganzen Funktion noch den Begriff untere Wachstumsordnung einzuführen; es bestehen nebeneinander die Definitionen

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}, \quad u = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

Der neue Begriff wird in Beziehung gesetzt zur Potenzreihendarstellung, wo beide Wachstumsordnungen übereinstimmen mit den Ordnungen für Zentralindex und Logarithmus des Maximalglieds. Ferner hängen sie mit den Lücken der Reihe zusammen: sind  $n_p$  die Indizes der nichtverschwindenden Koeffizienten, so gilt

$$u \leq \rho \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\log n_p}{\log u_{p+1}}.$$

Jede Funktion irregulären Wachstums ( $u \neq 0$ ) kann man als Summe einer ähnlichen Lückenreihe und einer Reihe von „kleiner“ Wachstumsordnung darstellen. Zum Schluß einige Angaben über Sätze, in die man den Begriff untere Ordnung leicht und mit Nutzen einführt. — Der Referent hat kürzlich den Begriff der unteren Ordnung von der Seite der geometrischen Funktionentheorie her als zweckmäßig erkannt und eingeführt [J. f. Math. 166 (1932); dies. Zbl. 4, 119].

Ulrich (Marburg, Lahn).

**Bernstein, Vladimir:** Sur les directions de Julia de certaines fonctions entières. J. École polytechn., II. s. cahier 30, 191–219 (1932).

L'auteur cherche à déterminer les droites de Julia d'une fonction entière d'ordre un et de type moyen  $F(Z) = \sum A_n Z^n$  en partant, soit du polygone de sommabilité de  $\varphi(z) = \sum n! A_n z^n$ , soit du «diagramme indicateur de  $F(Z)$ » (ou, encore le «diagramme conjugué de  $F(Z)$ »). Il a récemment émis une hypothèse générale à ce sujet [C. R. Acad. Sci., Paris 194, 350–353 (1932); voir Zbl. 3, 262]. M<sup>lle</sup> Cartwright a démontré que cette hypothèse n'est certainement pas vérifiée dans le cas général [voir C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1629 (1932); Zbl. 4, 218]. L'auteur a néanmoins démontré le bien-fondé de sa proposition dans quelques cas particuliers. La classe des fonctions pour laquelle l'hypothèse de l'auteur est valable est indiquée dans sa note citée plus haut (Zbl. 3, 262). Dans le présent travail l'auteur donne les démonstrations complètes de ses théorèmes. Il les généralise légèrement. — Voici, par exemple, un lemme qui lui sert beaucoup: si  $\log |F(R e^{i\psi})|/R \rightarrow C \cos(\psi - \psi_0) > 0$  uniformément pour  $\alpha \leq \psi < \beta$ , et si pour tout  $\psi$  tel que  $\beta < \psi < \gamma$  ou  $a C \cos(\psi - \psi_0) \neq H(\psi) (= \lim_{R \rightarrow \infty} \log |F(R e^{i\psi})|/R)$ ,

alors la droite définie par  $\text{Arg} Z = \beta$  est une droite de Julia pour  $F(Z)$ . L'auteur se base également sur quelques théorèmes de Haar [Math. Ann. **96**, 69 (1926)] dont voici un modèle. Si pour  $z$  voisin de  $z_0$  et tel que  $R[(z - z_0)e^{i\psi}] \geq 0$  on a

$$\frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_1^{\infty} \frac{B_\nu}{(z - z_0)^{c_\nu}} + g(z)$$

où  $g(z)$  est une fonction continue sur la droite  $x \cos \psi - y \sin \psi = H(\psi)$ , alors

$$F(Re^{i\psi}) = \sum_1^{\infty} \frac{B_\nu (Re^{i\psi})^{c_\nu - 1}}{\Gamma(c_\nu)} e^{z_0 R e^{i\psi}} \{1 - \varepsilon(R)\}$$

où  $\varepsilon(R) \rightarrow 0$  avec  $R \rightarrow \infty$ .

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Cartan, Henri:** Les transformations analytiques et les domaines convexes. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 30—31 (1931).

Als Verallgemeinerung eines Satzes von Study wird gezeigt, daß bei einer analytischen Abbildung, die einen konvexen Kreisbereich  $D$  mit dem Mittelpunkt  $x = y = 0$  in einen konvexen Bereich überführt, die aus  $D$  durch Ähnlichkeitstransformation in bezug auf  $(0,0)$  im Verhältnis  $1:l$  ( $l < 1$ ) erhaltenen Teilbereiche von  $D$  ebenfalls in konvexe Bereiche übergehen. Zum Beweise bedient sich Verf. einer nach Carathéodory eingeführten Distanzfunktion  $d(M)$ , die als obere Schranke des Absolutbetrages der Werte  $f(M)$  aller innerhalb  $D$  regulären, dem Betrage nach kleiner als 1 bleibenden und in  $(0,0)$  verschwindenden Funktionen  $f(x, y)$  erklärt ist. Verf. zeigt, daß es zu jedem Zwischenpunkt  $M_0$  der Verbindungsstrecke zweier in  $D$  gelegenen Punkte  $M_1, M_2$  ( $d(M_2) \leq d(M_1)$ ) eine analytische Abbildung gibt, die  $D$  unter Festhaltung des Nullpunktes in einen innerhalb  $D$  gelegenen Bereich transformiert und  $M_1$  in  $M_0$  überführt. Daraus folgt  $d(M_0) \leq d(M_1)$ , und da die durch  $d(M) < l$  ( $l < 1$ ) definierten Bereiche gerade jene ähnlichen Transformaten von  $D$  sind, ist der Satz bewiesen.

Kähler (Hamburg).

**Horstmann, Helmut:** Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen: Carathéodorysche Metrik und Regularitätshüllen. Math. Ann. **108**, 208—217 (1933).

Die Distanzfunktion von Carathéodory ordnet bei gegebenem offenen Bereich  $\mathfrak{B}$  je 2 Punkten  $A$  und  $B$  aus  $\mathfrak{B}$  eine endliche Zahl  $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$  als Entfernung zu. Hält man  $A$  fest und läßt  $B$  gegen einen Randpunkt  $P$  von  $\mathfrak{B}$  laufen, so kann  $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$  über alle Grenzen wachsen. Je nach dem Verhalten von  $D_{\mathfrak{B}}(A, B)$  in der Nachbarschaft von  $P$  heißt  $P$  ein endlicher, unstetig unendlicher oder stetig unendlich ferner Randpunkt von  $\mathfrak{B}$ . Der Verf. gibt nun Beispiele und Kriterien für die verschiedenen Arten von Randpunkten an. Sodann untersucht der Verf. die normalen Bereiche, das sind jene mit nur unendlich fernen Randpunkten (eine gegenüber analytischen Abbildungen von  $\mathfrak{B}$  invariante Eigenschaft). Jeder normale Bereich ist Regularitätsbereich, und jeder Regularitätsbereich läßt sich durch normale Bereiche approximieren. Zum Schluß wird der Existenzbereich der Distanzfunktion von  $\mathfrak{B}$ , der über  $\mathfrak{B}$  hinausragen kann, untersucht und mit der Nebenhülle von  $\mathfrak{B}$  in Beziehung gesetzt.

Behnke (Münster in Westf.)

**Hedrick, E. R.:** Non-analytic functions of a complex variable. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 75—96 (1933).

Diese Arbeit gibt eine Übersicht über die bisher in der Theorie der nichtanalytischen (oder polygenetischen) Funktionen einer komplexen Veränderlichen erreichten Resultate. Am Ende ist eine Bibliographie von einschlägigen Publikationen hinzugefügt, welche außerdem einige Arbeiten enthält, in denen die Theorie ausgedehnt wird auf mehrdimensionale Räume oder auf hyperkomplexe Zahlen, und Arbeiten über hinreichende Bedingungen zur Analytizität komplexer Funktionen.

J. Ridder.



## Numerische und graphische Methoden.

● Brachet, F., et J. Dumarqué: *Tables de logarithmes à 5 décimales des nombres de 1 à 10000 accompagnées de diverses tables usuelles.* Paris: Libr. Delagrave 1933. 60 S. Frs. 8.—.

● Brachet, F., et J. Dumarqué: *Tables de logarithmes à 5 décimales des nombres de 1 à 1000 et des fonctions circulaires en grades accompagnées de tables de conversions, degrés en grades et grades, en degrés et de diverses tables usuelles.* Paris: Delagrave 1933. 168 S. Frs. 16.—.

Kerl: Ein Beitrag zum Problem des Quadratwurzelausziehens mittels der Rechenmaschine. *Allg. Vermessg.-Nachr.* 45, 58—59 (1933).

Skotchka, O. D.: Sur l'appareil pour diviser les angles en des parties quelconques par procédé mécanique. *J. Cycle math.* 2, 51—54 (1932) [Ukrainisch].

Palm, Franz: Über die Verwendung der Maclaurinschen Transformation im graphischen Rechnen. *Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 7*, 64 (1933).

● Allcock, H. J., and R. Jones: *The nomogram. The theory and practical construction of computation charts.* London: G. J. W. Pitman 1932. VIII, 209 S. 10/6.

Chisini, O.: *Nomografia.* *Rend. Semin. mat. fis. Milano* 6, 31—52 (1932).

L'A. espone in breve gli elementi della Nomografia. *Autoreferat.*

Münzner, Hans: *Günstigste Bestimmung der Umkehrung der Laplace-Transformierten zur Auffindung verborgener Periodizitäten.* Göttingen: Diss. 1932. 45 S.

Beim Versuch, eine Funktion, deren Werte in einem Intervall, bzw. nur in äquidistanten Punkten  $\nu = 1, 2, \dots$  zur Verfügung stehen, durch eine Summe

$$f(\nu) = \sum_{\lambda=1}^p A_{\lambda} \sin(\alpha_{\lambda} \nu + \delta_{\lambda})$$

zu approximieren, scheitert die übliche Methode des kleinsten Fehlerquadrats an der Transzendenz der Bedingungsgleichungen; das Problem kann aber nach F. Bernstein algebraisiert werden, und zwar durch die sog. „Laplace-“ bzw. „Lagrange-Transformation“. Im Falle einer durch äquidistante Ordinaten gegebenen Funktion setzt man

$$L(\tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) e^{-\tau \nu} = \sum_{\lambda=1}^p \frac{u_{\lambda} + v_{\lambda} e^{\tau}}{C_{\tau} + z_{\lambda}},$$

wo

$$u_{\lambda} = A_{\lambda} \sin(\alpha_{\lambda} - \delta_{\lambda}), \quad v_{\lambda} = A_{\lambda} \sin \delta_{\lambda}, \quad z_{\lambda} = 2(1 - \cos \alpha_{\lambda})$$

neue Unbekannte sind, aus denen sich  $A_{\lambda}$ ,  $\alpha_{\lambda}$ ,  $\delta_{\lambda}$  leicht berechnen lassen.  $C_{\tau}$  hängt nur von  $\tau$  ab. Münzner untersucht nun, wie man bei beliebig vielen  $L$ -Summen die gesuchten Größen und ihre mittleren Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate finden kann. Dabei werden die Fehlergleichungen alle als miteinander korreliert angesehen. M. bestimmt insbesondere die zweckmäßigsten zu gebrauchenden  $\tau$ -Werte, und zwar veranlaßt ihn eine Betrachtung der „Mellinschen Umkehrformel“, komplexe Werte zu wählen. Der Realteil derselben wird konstant gehalten, die Imaginärteile bestimmen sich im Anschluß an die Gaußsche Quadraturmethode durch die Nullstellen der Kugelfunktionen und gehören dem Intervall  $(0, \pi)$  an. Im Falle einer stetig gegebenen Funktion werden die Formeln, welche jetzt Integrale statt Summen enthalten, z. T. einfacher.

*Nyström (Helsingfors).*

Eddington, A. S.: *Notes on the method of least squares.* *Proc. Physic. Soc., London* 45, 271—287 (1933).

Der mittlere Fehler ist das geeignetste Kriterium für die Genauigkeit von Beobachtungen. Es wird eine Herleitung für den mittleren Fehler gegeben und gezeigt,

daß die Methode der kleinsten Quadrate auch dann den besten Wert liefert, wenn kein Gaußsches Fehlergesetz vorausgesetzt wird. *G. Koehler* (Erfurt).

**Aitken, A. C.: On the graduation of data by the orthogonal polynomials of Least Squares.** Proc. Roy. Soc. Edinburgh 53, 54—78 (1933).

Es wird hier die Theorie der Ausgleichung (nach der Methode der kleinsten Quadrate) von äquidistanten, gleich guten und voneinander unabhängigen Beobachtungen mittels Orthogonalpolynomen gegeben. Zur Anwendung gelangen nicht nur Differenzen und Summen, sondern auch Faktorielle. Die Polynome werden entwickelt bis  $n = 25$  und zum Schluß die Verwandtschaft der Methode mit der Determinanten-Methode erwähnt. — Die Abhandlung verfolgt einen ähnlichen Zweck wie die Stephan-sche (vgl. dies. Zbl. 6, 124), geht jedoch in mehreren Beziehungen tiefer. Literatur-verzeichnis. *Burrau* (Kopenhagen).

**Innes, R. T. A.: Interpolation without differences.** Observatory 56, 89—91 (1933).

Die Arbeit setzt die Gedankengänge der in dies. Zbl. 4, 124—125 und besonders 5, 20 (A. C. Aitken) ref. Arbeiten fort. Das Ziel ist, Formeln aufzustellen, wodurch die Anwendung der für kommerzielle Zwecke konstruierten Rechenmaschinen auch für wissenschaftliche Rechnungen erleichtert wird. Die Arbeiten Comrie's in Monthly notices und seine „Modern Babbage Machines“ (Bulletin der „Office Machinery Users' Association“ 1932) sind auch berücksichtigt. Nicht nur Interpolation, sondern auch numerische Differentiation wird in Betracht gezogen. *Burrau* (Kopenhagen).

**Mammana, G.: Sulla risoluzione numerica di un sistema di equazioni.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 617—620 (1932).

Ist  $f_1(x, y) = 0$  und  $f_2(x, y) = 0$  das aufzulösende Gleichungssystem und setzt man  $F(x, y) = f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y)$ , so sind die reellen Nullstellen des gegebenen Systems identisch mit den isolierten Punkten von  $F(x, y) = 0$ . Es wird ein Verfahren skizziert, diese isolierten Punkte näherungsweise aufzufinden. Die genauere Durchführung wird in einer weiteren Arbeit in Aussicht gestellt. *Pingitzer* (Wien).

● **Brown, Ernest W., and Dirk Brouwer: Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis.** Cambridge: Univ. press 1933. 89 S. 10/6.

Das vorliegende Tafelwerk ist die Buchausgabe von Transactions of the Yale University Observatory, vol. 6, part V. Es soll die Berechnung der Störungsfunktion und ihrer Ableitungen in allen bei Planetenstörungen vorkommenden Fällen erleichtern. Tafel I bringt die Koeffizienten einer Fourierreentwicklung der Funktion

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos S)^{-\frac{1}{2}}$$

in logarithmischer Form. Als Tafelargument ist  $p = \alpha^2/(1 - \alpha^2)$  gewählt, die Tafel reicht von  $p = 0,00$  bis 2,50 und gibt die 12 ersten Fourierkoeffizienten. Die bei einer Potenzentwicklung nach den Bahnneigungen benötigten ungeraden ganzzahligen Potenzen der Störungsfunktion lassen sich nach demselben Schema aus den Tafeln II bis IV entnehmen. Die Tafeln sind so angelegt, daß die gesuchten Werte im allgemeinen mit linearer Interpolation gewonnen werden können. Tafel V wird in denjenigen Fällen mit Nutzen angewandt, in denen  $\alpha$  nahe 1 ist. Die Fourierkoeffizienten sind hier nach einer von E. W. Brown stammenden Methode nach Potenzen von  $p - 3$  bzw.  $p - 4$  entwickelt [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 92, 224—227 (1932); s. dies. Zbl. 3, 380]. Mit Tafel V lassen sich ohne Einbuße an Genauigkeit alle Werte bis  $\alpha = 0,913$  erledigen. Für noch größere Werte von  $\alpha$  sind die Fourierkoeffizienten den Tafeln VI und VII zu entnehmen. Die Tafeln VIII bis X sind für Zwecke der harmonischen Analyse bestimmt, speziell für diejenigen Störungsprobleme, in denen Jupiter oder Saturn die störenden Körper sind. Es wird auch der Fall berücksichtigt, daß als unabhängige Variable statt der Zeit die wahre Anomalie des gestörten Körpers benützt werden soll. Der anschließende Text gibt ausführliche Anweisung für den Gebrauch der Tafeln sowie für die harmonische Analyse einfach- und zweifach-periodischer Funktionen mit Anwendungsbeispielen aus der Störungstheorie. *A. Klose* (Berlin).



## Geometrie.

● Breidenbach, Walter: Die Dreiteilung des Winkels. (Math.-phys. Bibl., Reihe 1, H. 78.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1933. IV, 38 S. u. 43 Fig. RM. 1.20.

Schmidt, Hermann: Eine Eigenschaft der regelmäßigen Vielecke, deren Eckenzahl eine Primzahlpotenz ist. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 42, 253—254 (1933).

Thébault, V.: Sur le théorème de Feuerbach. Gaz. mat. 38, 281—282 (1933).

Carathéodory, C.: Die Kurven mit beschränkten Biegungen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 3/4, 102—125 (1933).

$x_i = x_i(s)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) stelle im  $n$ -dimensionalen Raum einen Kurvenbogen  $c$  mit stetiger Tangente dar ( $s$  = Bogenlänge). Es bezeichne  $\vartheta$  die sphärische Entfernung zweier Punkte  $x'_i(s_1)$  und  $x'_i(s_2)$  des Tangentenbildes  $x'_i(s)$  von  $c$ . Dann heißt  $\vartheta/|s_1 - s_2|$  die Biegung des durch die Punkte  $x_i(s_1)$  und  $x_i(s_2)$  begrenzten Teilbogens von  $c$ . Die Arbeit beschäftigt sich mit der Klasse von Kurven, für die die Biegungen ihrer sämtlichen Teilbögen eine feste Schranke nicht übersteigen. Diese Schranke kann ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden. (Führt man stärkere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ein, so erhält man die Klasse der Kurven, deren Krümmung  $\leq 1$  ist.) Für die Kurven mit Biegungen  $\leq 1$  werden mehrere charakteristische Eigenschaften festgestellt, von denen einige hier genannt seien. 1. Bei einem Kurvenbogen mit Biegungen  $\leq 1$  und der Länge  $S < 2\pi$  ist die Entfernung seiner Endpunkte nicht kleiner als die Sehne des Kreisbogens vom Radius 1 und der Länge  $S$ . (Dies ist im wesentlichen die von E. Schmidt, S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1925, 485, herrührende Verallgemeinerung eines Satzes von A. Schur.) Besitzt umgekehrt jeder Teilbogen genügend kleiner Länge diese Eigenschaft, so sind die Biegungen des Bogens  $\leq 1$ . 2. Ein stetiger Kurvenbogen hat dann und nur dann Biegungen  $\leq 1$ , wenn kein Teilbogen genügend kleiner Länge ganz außerhalb einer Kugel vom Radius 1 verläuft, auf deren Oberfläche die Endpunkte dieses Teilbogens liegen. 3. Ein Kurvenbogen ohne mehrfache Punkte, dessen Länge  $\leq \pi$  ist, besitzt dann und nur dann Biegungen  $\leq 1$ , wenn je drei seiner Punkte auf einer Geraden oder auf einem Kreis liegen, dessen Radius  $\geq 1$  ist. — Ferner ergibt sich u. a. die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von H. A. Schwarz (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1906, 365) über Kurven konstanter Krümmung 1: Ein Kurvenbogen mit Biegungen  $\leq 1$  und dem Durchmesser  $< 2$  ist im Durchschnitt aller der Kugeln vom Radius 1 enthalten, auf deren Oberfläche seine Endpunkte liegen.

W. Fenchel (Göttingen).

Fog, David: Über den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 5, 251—254 (1933).

Es wird bemerkt, daß der Vierscheitelsatz für ebene konvexe Kurven eine fast unmittelbare Folge des folgenden Satzes ist: Bei zwei stetig gekrümmten konvexen Kurvenbögen gleicher Länge sei die Krümmung in einem beliebigen inneren Punkt des ersten stets kleiner als die Krümmung in einem beliebigen Punkt des zweiten. Dann ist die Sehne des ersten Bogens länger als die des zweiten. Dieser Satz ist als Spezialfall in einem Satz von E. Schmidt (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1925, 485—490) enthalten. — Durch Ausnutzung der Tatsache, daß bei Inversionen Scheitel in Scheitel übergehen, wird der Vierscheitelsatz für doppelpunktfreie, nicht notwendig konvexe Kurven in der Ebene und auf der Kugel aus dem für ebene konvexe Kurven sehr einfach gefolgert.

W. Fenchel (Göttingen).

Strubecker, Karl: Über eine Kreisfigur. J. reine angew. Math. 169, 79—86 (1933).

Ein Rotationsnetz vermittelt eine Abbildung des Raumes auf die Mittelebene des Netzes: Einem Punkte oder einer Ebene des Raumes wird als Netzriß die Spur der durch den Punkt laufenden oder in der Ebene liegenden Netzgeraden zugeordnet. Der Netzriß einer Geraden wird ein Kreis. Es wird daher ein Tetraeder auf die Figur von

6 Kreisen und (den 4 Eckpunkten und 4 Seitenebenen entsprechend) 2·4 Schnittpunkten abgebildet, eine Miquelsche Kreisfigur. Einer solchen Figur entsprechen umgekehrt unendlich-viele Tetraeder. Befinden sich diese in hyperboloidischer Lage, so liegen sowohl die den Eckpunkten wie die den Seitenflächen der Tetraeder entsprechenden Punkte der Kreisfigur auf je einem Kreis. Es entsteht also eine Figur von 8 Punkten und 8 Kreisen (spezielle Miquelsche Kreisfigur.) Nach einem Satze von v. Staudt sind Bildtetraeder und Leitgeradenpaar des Drehnetzes im Falle der speziellen Kreisfigur Polartetraeder und Paar polarer Geraden eines Polarsystems. Dies Polarsystem (nach St. Jolles „Sekundäre Involution des Strahlennetzes“) wird im Netzriß auf eine involutorische Möbiussche Kreisverwandtschaft (Involution) abgebildet. Also: Eine spezielle Miquelsche Kreisfigur bestimmt in der konformen Ebene eine Involution, durch welche sie in sich selbst übergeführt wird. Dieser Satz kann zur Konstruktion einer durch zwei Paare entsprechender Punkte festgelegten Involution benutzt werden.

*E. A. Weiss* (Bonn).

**Franck, P.:** Zur Theorie der Kugelkomplexe. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 119 bis 132 (1933).

Allgemeine Eigenschaften der von S. Lie (Ges. Abhdl. I, 159) sog. part. D. Gl. 1. Ordn.  $D_{12}$ , deren Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien sind. Beispiele. Neben der nach S. Lie mit einem Kugelkomplex verbundenen („Haupt-“) Gleichung, die stets der Klasse  $D_{12}$  angehört, wird eine aus ihr durch einen Vorzeichenwechsel entstehende „Nebengleichung“ betrachtet und es wird untersucht, unter welchen Umständen auch diese der Klasse  $D_{12}$  angehört.

*E. A. Weiss* (Bonn).

**Warnock, Walter G.:** On the geometry of groups of line configurations. Tôhoku Math. J. 36, 303—319 (1933).

Die Plückersche Identität läßt gewisse Vertauschungen und Vorzeichenänderungen der Linienkoordinaten zu. Die vermöge solcher Substitutionen zusammengehörigen Geraden werden auf ihre Inzidenz hin und in bezug auf die Konfiguration der Punkte untersucht, die sie aus den Koordinatenebenen ausschneiden.

*Weiss* (Bonn).

**Mirguet, J.:** Sur certains ensembles de droites. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1067 bis 1069 (1933).

**Moufang, Ruth:** Die Desarguesschen Sätze vom Rang 10. [Eine Ergänzung zu „Ein Satz über die Schnittpunktsätze des allgemeinen Fünfecksnetzes. (Das (A, B)-Netz.)“ Math. Ann. 108, 296—310 (1933).]

Vorausgesetzt wird ein Fünfecksnetz, in dem außer den ebenen Axiomen noch der  $D_9$  (Desarguesscher Satz vom Range 9, äquivalent mit dem Vierseitsatz) gilt. Mit teils algebraischen, teils synthetisch-geometrischen Methoden wird gezeigt, daß dann die Hilbertsche Streckenrechnung assoziativ ist und mithin alle Desarguesschen Sätze vom Range 10 gelten. Also: Alle  $D_{10}$  folgen aus dem  $D_9$ . Dieses Ergebnis bildet eine Ergänzung zu der in der Überschrift zitierten Arbeit der Verf. (Math. Ann. 107, 124—139; dies. Zbl. 4, 411). Dort wurde nämlich unter Heranziehung einer weiteren Voraussetzung (Existenz einer bestimmten Pascalschen Konfiguration) die Assoziativität und Kommutativität der Streckenrechnung, also die Gültigkeit aller in Frage kommenden Schnittpunktsätze bewiesen.

*Friedrich Levi* (Leipzig).

**Ramamurti, B.:** Desargues configurations admitting a collineation group. J. London Math. Soc. 8, 34—39 (1933).

Denkt man sich die Desarguessche Konfiguration (D. K.) als ebenen Schnitt eines räumlichen Fünfecks, so wird eine automorphe Kollineation dieser D. K. von einer räumlichen automorphen Kollineation des Fünfecks induziert, welche die Ebene der D. K. in Ruhe läßt. Die Frage nach allen möglichen Typen von D. K. mit automorphen Kollineationen wird also darauf zurückgeführt, die Ruheebenen der verschiedenen Arten von automorphen Kollineationen eines räumlichen Fünfecks zu finden. — Eine D. K. bestimmt ferner nach Stephanos eindeutig umkehrbar eine binäre Form 6. Ordnung



auf dem Kegelschnitt, in bezug auf den sie zu sich selbst polar ist. Den verschiedenen Typen von D. K. entsprechen die Typen von Formen 6. Ordnung, die (binäre) automorphe Projektivitäten gestatten. *E. A. Weiss (Bonn).*

**Harmegnies, R., et Paul Lévy: Sur un théorème de géométrie projective.** J. École polytechn., II. s. cahier 30, 221—228 (1932).

Ein Dreieck sei einem Kegelschnitt  $K$  ein- und einem Kegelschnitt  $K'$  umbeschrieben. Dann laufen die Verbindungslinien seiner Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt  $M$ . Da sich die beiden Kegelschnitte in Schließungslage befinden, existieren  $\infty^1$  Dreiecke dieser Art. Der Ort der Punkte  $M$  ist eine Kurve 2. Ordnung, die dem von  $K$  und  $K'$  aufgespannten Büschel angehört. Für diesen Satz wird ein analytischer und ein synthetischer Beweis gegeben. *E. A. Weiss.*

**Lagrange, René: Sur le théorème de Poncelet et une classe de cycloïdes.** C. R. Acad. Sci., Paris 196, 663—666 (1933).

Führt man auf einer Quadrik  $Q$  in üblicher Weise Parameter ein, die je eine Erzeugendenschar zu Niveaulinien haben, so lautet in diesen Parametern die Gleichung einer allgemeinen auf  $Q$  liegenden Kurve 4. Ordnung  $K$  genau so, wie in der Ebene die Gleichung eines Kegelschnittes in Tangentialkoordinaten eines anderen Kegelschnitts. Also läßt sich das Ponceletsche Theorem über Sehnen-Tangenten-Polygone zweier Kegelschnitte übertragen auf Polygone, deren Seiten Erzeugende von  $Q$  sind und deren Ecken auf  $K$  liegen. Hierbei spielen die acht  $K$  berührenden Erzeugenden eine Rolle. Ferner ergibt sich: Die Zyklide, deren Punkte konstantes Potenzverhältnis zu zwei im Raume festen Kreisen haben, stehen in der gleichen Beziehung zu einer einparametrischen Mannigfaltigkeit von Kreispaares. *Cohn-Vossen (Köln).*

**Woods, Roseoe, and Carl H. Fischer: Some curves derived from two curves.** Tôhoku Math. J. 36, 225—229 (1933).

$M$ ,  $N$  sind entsprechende Punkte in einer (1,1)-Korrespondenz zwischen zwei rationalen ebenen Kurven; die Parallelen durch  $M$ ,  $N$  zu den Koordinatenachsen liefern zwei Schnittpunkte  $C$ ,  $D$  deren Örter untersucht werden. Die Enveloppe der Geraden  $CD$  wird auch betrachtet. Einige Beispiele. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Clarkson, J. M.: Some involutorial line transformations.** Bull. Amer. Math. Soc. 39, 149—154 (1933).

Eine Gerade  $x$  schneidet aus gewissen eindimensionalen Linienörtern vier Geraden aus, die außer  $x$  eine zweite Gerade  $x'$  zur gemeinsamen Transversalen haben. Eine involutorische Geradentransformation entsteht dadurch, daß man der Geraden  $x$  die Gerade  $x'$  zuordnet. In Fortsetzung von Zbl. 5, 115, werden hier als eindimensionale Linienörter zugrunde gelegt: 1. Ein kubischer Regulus und ein Geradenbüschel, 2. Ein biquadratischer Regulus mit kubischer Doppelkurve. — Eine zweite Art involutorischer Linientransformationen wird so definiert: In zwei Ebenen wird je eine involutorische Kollineation vorgegeben. Die Schnittpunkte einer Geraden  $x$  mit den beiden Ebenen werden diesen Kollineationen unterworfen und die Verbindungslinie der transformierten Punkte wird die der Geraden  $x$  zugeordnete Gerade  $x'$ . — Die Transformationen als Punktverwandtschaften auf  $M_4^2$  im  $R_5$ . *E. A. Weiss (Bonn).*

**Giudice, Francesco: Orientamenti e spostamenti.** Atti Mem. Accad. Sci. Padova, N. s. 48, 209—219 (1932).

Zwei Beweise des zuerst 1763 von Giulio Mozzi ausgesprochenen Satzes, daß eine unendlich kleine Bewegung des Raumes mit einer Schraubung übereinkommt. Der erste Beweis wird rein geometrisch geführt auf Grund eines sorgfältigen Aufbaues der bekannten Orientierung von Strecken, Dreiecken, Tetraedern und mit Hilfe der gleichsinnigen und der ungleichsinnigen Kongruenz unter Einbeziehung der grundlegenden Sätze der ebenen Bewegungslehre (störender Druckfehler  $O_n$  an Stelle von  $A_n$  auf Seite 213, Zeile 14 von unten). Der zweite Beweis ist analytisch-geometrisch. *W. Ludwig (Dresden).*

**Weiss, E. A.:** Die projektiven Invarianten von vier Ebenen im  $R_5$ . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **36**, 74—75 (1933).

Für das Verschwinden der nichtbilinearen symmetrischen Invariante eines kleinsten projektiven Invariantensystems, welches Weitzenböck (siehe dies. Zbl. **5**, 407) für vier Ebenen im  $R_5$  aufgestellt hat, wird eine geometrische Deutung gegeben, in der Voraussetzung, daß die Ebenen paarweise windschief sind. *Griss* (Doetinchem).

**Clark, C. E.:** Bi-affine geometry in the plane. Amer. Math. Monthly **40**, 73—76 (1933).

Plane bi-affine geometry is defined by that sub-group of the projective group which leaves both the line at infinity and the origin invariant. It is self-dual. The author classifies bi-affine transformations over a general field, reduces the second degree form to normal form, classifies conics, and gives their 12 normal forms. *Mac Duffee*.

**Matsumura, Sôji:** Über einen affingemetrischen Satz und die Deviation ebener Kurven. Tôhoku Math. J. **36**, 189—191 (1933).

La déviation d'une courbe plane est un angle  $\varphi$  entre ses normales affine et ordinaire. En désignant par  $\rho$  et  $\sigma$  le rayon de courbure et l'arc (ordinaires) de la courbe, l'auteur démontre la formule  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{d\sigma}$ . D'où suit le théorème de M. Kurota [Sci. Rep. Tôhoku Univ. **16** (1927)]: la seule courbe à déviation constante est une spirale logarithmique. *S. Finikoff* (Moscou).

**Jervis, Sybil D.:** Some properties of the affine normal. Tôhoku Math. J. **36**, 320 bis 323 (1933).

Les normales affines aux points homologues  $A_i$  d'une famille  $L$  de courbes parallèles concourent; leur point d'intersection  $P$  est situé sur la droite qui est parallèle aux tangentes de  $L$  et passe par leur centre de courbure commun. Le lieu des centres des coniques osculatrices aux points homologues de  $L$  est une conique  $S$ . Les points  $A_i$  mouvant,  $P$  décrit une partie de l'enveloppe des coniques  $S$ ; la seconde partie en est la développée commune des  $L$ . L'article contient beaucoup de théorèmes particuliers sur la position des points  $P$  qui correspondent aux couples de points opposés (aux tangentes parallèles) des diverses ovales, sur les coniques  $S$  etc. donnés presque sans démonstration. *S. Finikoff* (Moscou).

### Algebraische Geometrie:

**Green, H. G., et L. E. Prior:** Au sujet de certains systèmes de coniques et de quadrilatères liés à la courbe du troisième ordre. J. École polytechn., II. s. cahier **30**, 99 bis 113 (1932).

Die ebene Kurve 3. Ordnung als Fokalkurve einer Kegelschnittschar. (Vgl. H. Schröter, Math. Ann. **5**, 1872.) *E. A. Weiss* (Bonn).

**Oppenheimer, H.:** Über eine Erweiterung des Bereichs der Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Kurven dritter Ordnung. Mitt. math. Ges. Hamburg **7**, 163—185 (1933).

Einfache Anwendungen der parametrischen Darstellung einer ebenen elliptischen  $C^3$  mit der Integrale 1. Gattung. Verf. betrachtet insbesondere auf der Kurve die Vierecke mit den Parameterwerten  $k, l, m, n; \frac{\varepsilon}{2} - k, \frac{\varepsilon}{2} - l, \frac{\varepsilon}{2} - m, \frac{\varepsilon}{2} - n$ ; wo  $\varepsilon = k + l + m + n$ ; und gibt Regeln, um aus zwei solchen Vierecken andere ähnliche Viereckpaare abzuleiten. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Babbage, D. W.:** The number of rational quartic curves with seven assigned tri-secant planes in space of four dimensions. J. London Math. Soc. **8**, 9—11 (1933).

Die gesuchte Anzahl ist 10. Sie wird gefunden in der Voraussetzung folgender besonderer Lage der 7 Ebenen: fünf von ihnen werden allgemein gewählt; diese fünf Ebenen bestimmen eine elliptische Regelfläche 5. Ordnung, die aus allen Geraden besteht, die sie schneiden; als sechste Ebene wird die Ebene einer der  $\infty^1$  kubischen Leit-



linien der Regelfläche gewählt; die letzte Ebene ist wieder allgemein. Die  $V_3^4$  durch die fünf ersten Ebenen führen zu einer Cremonaschen Verwandtschaft, die die gesuchten Kurven  $C^4$  in Geraden verwandelt.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Chisini, Oscar:** Sul problema d'inversione. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 1133 bis 1143 (1932).

Man konstruiere auf einer algebraischen Kurve mit dem Geschlecht  $p$  eine (vollständige) Linearschar  $g_{3p}^2$ , z. B. diejenige die von einem allgemeinen Punkt der Kurve,  $3p$ -mal gezählt, bestimmt wird. Eine solche  $g_{3p}^2$  liefert eine Abbildung der gegebenen Kurve auf einer Kurve  $C^{3p}$  der Ordnung  $3p$  in einem  $2p$ -dimensionalen Raume. In diesem Raume, werden als Fundamentalpunkte der Koordinaten  $2p + 1$  allgemeine Punkte  $V_0, V_1, \dots, V_{2p}$  der Kurve  $C$  gewählt. Es seien jetzt die „Abelschen Koordinaten“  $\bar{u}_i$  einer Punktgruppe  $X_1, X_2, \dots, X_p$  auf  $C$  gegeben, d. h. die Werte der  $p$  Summen  $u_i(X_1) + u_i(X_2) + \dots + u_i(X_p)$ , wo  $u_1, u_2, \dots, u_p$  die  $p$  Abelsche normale Integrale 1. Gattung auf  $C$  bedeuten. Der Verf. beweist sehr einfach, daß die Koeffizienten  $\psi_s$  in der Gleichung  $\sum \psi_s y_s = 0$  der Hyperebene  $\pi$ , die die Kurve  $C^{3p}$  in allen Punkten  $X_1, \dots, X_p$  berührt, folgende aus  $\theta$ -Reihen gebildeten Ausdrücke besitzen:  $\psi_s = \theta^2(v_{is} - \bar{u}_i + k_i) \cdot \theta(v_{is} + 2\bar{u}_i + k_i)$ , wo  $i = 1, 2, \dots, p$  und wobei  $v_{is}$  den Wert von  $u_i$  im Punkte  $V_s$  bedeuten, während  $k_i$  wohlbekannte Konstanten sind. Die angewendeten  $\theta$  sind die einfachen  $\theta$ -Reihen erster Ordnung, die mit den normalen Perioden der Integralen  $u_i$  konstruiert werden. Die Ausrechnung der  $\psi_s$  löst das Jakobische Umkehrproblem, da die Gleichungen der Kurve  $C$ , mit der Gleichung der Hyperebene  $\pi$  verbunden, die elementarsymmetrischen Funktionen der Punkte  $X_1, \dots, X_p$  zu berechnen gestatten. Es wird auch der Fall behandelt, wo alle  $\psi_s$  identisch Null sind; es ist der Fall, wo die  $\bar{u}_i$  eine ganze Spezialschar  $g_p^2$  bestimmen.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Campedelli, L.:** Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 37–40 (1933).

Dans ce travail, qui se rattache à la théorie des séries rationnelles de groupes de points équivalents sur une surface algébrique  $F$ , l'auteur apporte quelques compléments intéressants. Il indique notamment l'interprétation géométrico-fonctionnelle d'une formule de Bonnesen donnant le nombre  $\tau$  des points de  $F$  qui sont points-bases doubles pour un faisceau de courbes contenu dans un système triplement infini  $|C|$ ; il introduit pour cela une nouvelle série invariante pouvant s'exprimer au moyen de la série  $S_s$  introduite par Sévéri et de la série canonique  $S_c$ . Enfin il est conduit à une définition directe, à partir d'une involution rationnelle  $I_n$ , de la série  $S_c$ , dont le double a été considéré par Enriques (voir ce Zbl. 6, 127).

*P. Dubreil (Lille).*

**Senigaglia, Emma:** Completamento di un teorema di A. Hurwitz sulla base del modulo delle forme algebriche passanti per una varietà razionale normale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 66–68 (1933).

A. Hurwitz a déterminé une base du module des formes algébriques «passant» par une variété rationnelle normale; l'auteur montre que les formes de cette base ne sont pas linéairement indépendantes et calcule le nombre de celles d'entre elles qui le sont.

*P. Dubreil (Lille).*

**Du Val, Patrick:** On the regular surface of genus three and linear genus four. J. London Math. Soc. 8, 11–18 (1933).

Die allgemeinste reguläre Fläche mit  $p_a = p_g = 3$  und  $p^{(1)} = 4$  wird erhalten, indem die Projektion  $\Gamma$  der Veroneseschen Fläche aus einem Punkt des Raumes  $S_6$  mit einer kubischen Hyperfläche geschnitten wird. Die kanonische Fläche ist eine dreifach überdeckte Ebene mit Verzweigungskurve der Ordnung 12, welche aus dem Quadrat einer Kurve 6. Ordnung und dem Kubus einer Kurve 4. Ordnung linear zusammengesetzt ist. Eine Reihe von speziellen Fällen werden noch diskutiert.

*van der Waerden (Leipzig).*

**Du Val, Patrick:** On rational surfaces whose prime sections are canonical curves. Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 1—13 (1933).

Verf. zeigt, daß eine algebraische Fläche, deren ebene (oder hyperebene) Schnitte Noethersche Normalkurven sind, dann und nur dann rational ist, wenn sie einen und nur einen singulären Punkt besitzt, der den adjungierten Flächen bzw. Hyperflächen genau eine Bedingung auferlegt. Doppelt überdeckte Regelflächen mit rationaler Normalkurve der Ordnung  $\pi - 1$  als Leitkurve und einer Verzweigungskurve der Ordnung  $2\pi + 2$  liefern Flächen, deren hyperebene Schnitte hyperelliptische Doppelkurven vom Geschlecht  $\pi$  sind. Wenn jede Erzeugende eines solchen doppelten Kegels von der Verzweigungskurve zweimal getroffen wird, ist die Fläche rational. Durch Verwendung der rationalen Uniformisierung bekommt Verf. eine vollständige Einsicht in die Singularitäten der rationalen Flächen, deren ebene oder hyperebene Schnitte Normalkurven vom Geschlecht  $\pi$  sind: soweit es sich nicht um die genannten doppelten Regelflächen handelt, besitzt die Fläche entweder einen elliptischen konischen Punkt der Vielfachheit  $\mu$ ,  $2 \leq \mu \leq \pi$  oder einen „unode“ 2. Ordnung, der in der Umgebung 2. oder  $\pi$ ter Ordnung elliptisch ist. Es folgen eine Aufzählung und Diskussion dieser Flächen für die ersten Werte von  $\pi$ . Kähler (Hamburg).

### Differentialgeometrie:

**Matsumura, Sôji:** Über konvex-geschlossene Flächen. Tôhoku Math. J. 36, 192 bis 195 (1933).

1. Es wird behauptet, daß eine gewisse Bedingung für Eiflächen konstanter Helligkeit (vgl. Blaschke, Kreis und Kugel, S. 151—154. Leipzig 1916) kennzeichnend ist. Daß diese Bedingung hinreichend ist, wird zu zeigen versucht; ihre Notwendigkeit wird anscheinend für selbstverständlich gehalten. Analoge Behauptungen für Eiflächen konstanter Breite und eine weitere Flächenklasse. — 2. Es wird eine der Kennzeichnung des Kreises von W. Süß (vgl. dies. Zbl. 2, 144) verwandte Kennzeichnung der Kugel zu geben versucht. Der Beweis enthält jedoch eine Lücke. W. Fenchel.

**Matsumura, Sôji:** Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben. VI. Tôhoku Math. J. 36, 257—259 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 5, 81 u. 179.

**Conte, Luigi:** Su una classe particolare di superficie rigate. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 77—80 (1933).

L'A. determina le superficie rigate per le quali esiste una relazione lineare a coefficienti costanti tra  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , generalizzando così ein risultato del Chiellini relativo alle rigate armoniche ( $r + t = 0$ ).

Autoreferat.

**Kasner, Edward:** Geometry of the heat equation: II. paper. The three degenerate types of Laplace, Poisson and Helmholtz. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 257—262 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 4, 414. Es sei in der Ebene ein solcher Wärmeleitungsprozeß gegeben, daß die Isothermen während des ganzen Ablaufs dieselben sind (der Prozeß braucht nicht stationär zu sein, da die zu einer Isotherme gehörige Temperatur mit der Zeit wechseln kann). Dann wird eine geometrische Kennzeichnung derjenigen Kurvenscharen gegeben, die hierbei als Isothermenschar auftreten können. Schreibt man die Schar in der Form  $g(x, y) = \text{konst.}$ , so genügt  $g$  bei passender Wahl des Koordinatenmaßstabs einer der folgenden Differentialgleichungen:  $\Delta g = 0$ ,  $\Delta g = 1$ ,  $\Delta g = \pm g$ . Mit Ausnahme einer Schar paralleler Geraden oder konzentrischer Kreise gibt es keine Kurvenschar, die mehr als einer dieser Gleichungen genügt, auch wenn man  $g$  durch irgendeine Funktion  $h(g)$  ersetzt. Eine Kennzeichnung der betrachteten Kurvenscharen durch eine Relation in den Krümmungsgrößen soll in einer späteren Arbeit von A. Fialkow gegeben werden. Die Beweise stützen sich auf Reihenentwicklungen, Verf. gibt die Existenz eines anderen Beweises an, der diese Entwickelbarkeit nicht voraussetzt. In späteren Arbeiten sollen die Ergebnisse auf 3 Dimensionen ausgedehnt werden. Cohn-Vossen (Köln).



**Kosambi, D. D.:** Géométrie différentielle et calcul des variations. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 410—415 (1932).

The configuration considered is an  $n$ -dimensional space containing a family of  $\infty^{2n}$  curves, or paths, defined by (1)  $\ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0$ . This generalizes the spaces of paths considered by Eisenhart and Veblen [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 8 (1922)] and the reviewer [Ann. of Math. 29 (1928)], especially in the respect of the presence explicitly of the parameter  $t$ . The question is taken up of the possibility of identifying (1) with the extremals of a calculus of variations problem  $\delta \int f(x, \dot{x}, t) dt = 0$ . Conditions in tensor form are established, equivalent to those found by D. R. Davis (see this Zbl. 1, 69); these conditions, however, still involve the unknown function  $f$ . A parallel displacement is defined for the space, under which the curves (1) appear as self-parallel. The equations of variation of (1) are considered, and, under the ordinary law of transformation of vectors, a "theorem of Fermi" is given, according to which the components of parallel displacement can be made to vanish all along a path — the equations of variation then taking a simple canonical form. Another aspect of the system (1) is as the path curves of a certain transitive continuous group of parallel displacements. A tensor analysis of the space is developed, including the definition of a Riemann tensor and other differential invariants. *Douglas* (Cambridge, Mass.).

**Ślębodzinski, W.:** Sur les complexes de géodésiques dans une variété  $V_3$ . C. R. Acad. Sci., Paris 196, 458—460 (1933).

Let  $V_3$  be a 3-dimensional Riemannian space admitting a one-parameter group of motions defined by the covariant vector-field  $g_\sigma$ . At any point  $M$ , the totality of curves given by the Pfaffian  $g_\sigma dx^\sigma = 0$  define a complex  $K$ . The author proves that the element normal to  $q$  at  $M$  is the osculating element for every curve through  $M$  in  $K$ . This is obvious not only for a  $V_3$  but also for a Riemann space of any dimensionality. — The second theorem proves that the torsion is the same for all curves of  $K$  at  $M$  and it is in this theorem that the restriction to 3 dimensions is essential. *Knebelman*.

**Woude, W. van der, und J. Haantjes:** Über das bewegende Achsensystem im affinen Raum; Ableitung der Grundformeln der Flächentheorie. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 36, 41—51 (1933).

Es wird zunächst ganz allgemein die Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten von  $\infty^2$  Vektorbeinen im dreidimensionalen affinen Raum entwickelt. In der Schreibweise des Ricci-Kalküls werden Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen aufgestellt. Daraus werden dann durch Spezialisierung die Grundformeln der affinen Flächentheorie gewonnen. *Thomsen* (Rostock).

**Su, Buchin:** On a certain class of surfaces whose Darboux curves of one system are conics. Tôhoku Math. J. 36, 241—252 (1933).

Si une famille de lignes de Darboux d'une surface  $S$  consiste en lignes coniques de Peterson (= les lignes de contact de cônes circonscris) situées dans les plans d'un faisceau, toutes les lignes sont des sections coniques. La famille des lignes conjuguées (les lignes de Segre) possède la même propriété. Les coniques de la première famille passent par deux points fixes  $P_1, P_2$  et les pôles de la droite  $P_1 P_2$  par rapport aux diverses lignes de la famille engendrent l'axe du second faisceau. La surface  $S$  est une transformée projective de la surface affine de révolution [W. Süss, Math. Ann. 98, 694 (1928); B. Su, Jap. J. Math. 5, 185 (1928)]. L'auteur traite le problème en appliquant les formules générales de la Geom. proj.-diff. de Fubini-Čech. *S. Finikoff*.

**Rozet, O.:** Quelques remarques à propos des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 21—26 (1933).

Die Lieschen  $F_2$  einer Fläche  $S$  berühren im allgemeinen außer  $S$  noch vier weitere Flächen  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Hier wird der Fall  $S_3 = S_1, S_4 = S_2$  betrachtet. Es werden zuerst die Lieschen  $F_2$  der Flächen  $S_1$  und  $S_2$  bestimmt. Sodann wird der Fall untersucht, daß die drei Flächen  $S, S_1, S_2$  ineinander projektiv deformierbar sind. *Čech*.

**Terracini, Alessandro:** La lunghezza proiettiva di un arco di curva piana. *Period. Mat.*, IV. s. 13, 99—119 (1933).

**Delens, Paul:** Géométrie des congruences de courbes. *Rend. Circ. mat. Palermo* 56, 289—352 (1932).

Der erste Teil behandelt die Differentialgeometrie einer Kurvenkongruenz ( $K$ ) im dreidimensionalen euklidischen Raume. Eine wichtige Stellung nimmt dabei der quadratische Malussche Kegel  $M$  der Kongruenz ( $K$ ) ein. (Seine Erzeugenden  $G$  im betreffenden Punkte der Kongruenzkurve  $K$  sind jene Geraden, längs deren der erste Krümmungsvektor von  $K$  zu  $G$  orthogonal, oder Null ist. [Ref.] — Es sei ausdrücklich bemerkt, daß  $M$  auch ohne Hilfe von metrischen Begriffen definiert werden kann.) Insbesondere enthält er die Erzeugende  $G_0$ , längs deren die Tangentialrichtungen  $T$  von ( $K$ ) parallel verlaufen. (Für den allgemeinen nicht metrischen Fall dieser Richtung in einem mehrdimensionalen affin gekrümmten Raume siehe „Eisenhart, Non-Riemannian Geometry“ S. 38. Der allgemeine metrische Fall wurde vom Ref. im „Les congruences dans les espaces non-euclidiens“ und „Remarque à l'article . . .“ [Věstník Král. České Spol. Nauk, 1923, 1924] behandelt.) Die Richtung  $W$  der Polare zur Verbindungsebene  $TG_0$  in bezug auf  $M$  trägt den schon von Weatherburn (auf anderem Wege) eingeführten Vektor, der für ( $K$ ) von besonderer Wichtigkeit ist. Von diesen Begriffen ausgehend, wird die metrische Theorie von ( $K$ ) ausgebaut, auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden kann. Die von  $G_0$  umhüllte Kurvenkongruenz ( $G_0$ ) wird (samt Spezialfällen) eingehend betrachtet, sowie die sphärische Abbildung von ( $K$ ) und ( $W$ ). — Legt man durch ( $K$ ) eine Flächenfamilie  $F_i$ , so daß die durch  $K$  gehende Fläche mit der Oskulationsebene von  $K$  den Winkel  $\alpha = \alpha_i$  einschließt, so genügt  $\operatorname{tg} \alpha$  einer Riccatischen Gleichung, woraus Verschiedenes über ( $K$ ) gefolgert werden kann. Die Fälle  $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{konst.} = \text{bzw.} \neq \pi/2$  (orthoptische und verallgemeinerte Ribaucoursche Kongruenz) werden separat behandelt. — Im zweiten Teile wird die affine und projektive Differentialgeometrie von ( $K$ ) getrieben. Der unimodulare affine Fall (des dreidimensionalen nicht gekrümmten Raumes) wird auf den metrischen zurückgeführt, indem die Richtungen  $T, W, G_0$  als orthogonal erkannt werden und auf diesen die „Einheitsvektoren“ mittels des Blaschkeschen Verfahrens normiert werden. — In der projektiven Differentialgeometrie wird zuerst ein invariant mit ( $K$ ) verbundenes Tetraeder aufgesucht, und zwar mittels der bekannten Cartanschen Methode. (Siehe auch Fubini-Čech, „Introduction à la Géométrie projective différentielle“ [Paris 1931] die beiden letzten Kap.) Das führt zu den projektiven Differentialvarianten von ( $K$ ). (Auch hier spielt  $M$  eine besondere Rolle.) Die Arbeit endet mit einem Versuch des direkten projektiven Differentialkalkül. — Die Anwendung der direkten Symbolik (insbesondere im ersten Teile), welche auf eine ganz spezielle Gruppe basiert ist, gestattet nicht die Verallgemeinerung der Methode auf allgemeinere Fälle. *Hlavatý* (Prag).

**Delens, Paul, et Jacques Devisme:** Sur certaines formes différentielles et les métriques associées. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 196, 518—521 (1933).

This note is concerned with the geometrical interpretation of some of the differential invariants of a general metric  $ds = F(x, dx)$ . The first of these invariants is the well-known angular metric of Landsberg  $\Psi_2$  and a cubic form  $\Psi_3$  is given. The authors employ the usual method of attaching at each point  $x$  a flat space in which the differentials are cartesian coordinates and they apply it to a very special type of Minkowski space, or as they call it, a quasi-euclidean space  $R_3$  with the metric

$$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3 dx dy dz. \quad \text{Knebelman.}$$

**Racine, Ch.:** Sur les variétés extrémales à trois dimensions des espaces euclidiens à quatre dimensions. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* 53, 5—10 (1933).

L'objet de cette note est de déterminer les conditions auxquelles satisfait la métrique d'une variété extrémale à  $n - 1$  dimensions plongée dans un espace à  $n$  dimensions. On en fait une application au cas de  $n = 4$ , ce qui permet d'énoncer une classification des variétés extrémales dans ce cas. *Autoreferat.*



**Kermack, W. O., W. H. M'Crea and E. T. Whittaker: On properties of null geodesics, and their application to the theory of radiation.** Proc. Roy. Soc. Edinburgh 53, 31—47 (1933).

Definiert man geodätische Nulllinien (g. N.) einer  $V_n$  in bekannter Weise durch die Lösungen von

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ pq \end{matrix} \right\} \frac{dx^p}{d\lambda} \frac{dx^q}{d\lambda} = 0,$$

welche der Bedingung

$$g_{pq} \frac{dx^p}{d\lambda} \frac{dx^q}{d\lambda} = 0$$

genügen, und nennt man  $\eta^p = \frac{dx^p}{d\lambda}$  den eine g. N. begleitenden „Transportvektor“, so beweisen die Verff. die beiden folgenden Theoreme: I. Seien  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei benachbarte g. N.,  $C$  ein Punkt auf  $\Gamma$ ,  $C'$  ein in der Nähe von  $C$  liegender Punkt von  $\Gamma'$ . Sei  $\eta_p$  der kovariante Transportvektor von  $\Gamma$  und  $\delta\xi^p$  der Vektor  $CC'$ . Dann ist  $J = \eta_p \delta\xi^p$  unabhängig von der Richtung  $CC'$  und unabhängig von der Lage des Punktes  $C$  auf  $\Gamma$ .  $J$  hängt also nur von den g. N.  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  als ganzen, nicht von speziellen Punkten auf ihnen ab. — Eine kurze Rechnung beweist nämlich  $\frac{d}{d\lambda} (\eta_p \delta\xi^p) = 0$ . — II. Sei  $\Gamma$  eine durch  $C$  gehende g. N. und  $\eta^p$  ihr Transportvektor in  $C$ . Man bilde  $J$  für irgendeine der  $\infty^{n-1}$  zu  $\Gamma$  benachbarten und parallelen g. N. Den gleichen Wert  $J$  erhält man auf  $\infty^{n-2}$  verschiedenen g. N., die zusammen in einer  $V_{n-1}$  liegen, welche jeden (ebenen — da nur in Unendlichkleinen argumentiert wird)  $S_{n-1}$  durch  $C$  in einem (ebenen)  $S_{n-2}$  schneidet derart, daß dieser  $S_{n-2}$  senkrecht steht auf der Projektion von  $\Gamma$  in  $S_{n-1}$ . — Diese Sätze werden angewandt auf eine neue Definition des räumlichen Abstandes eines Sternes  $A$  von einem Beobachter  $B$ . (Da  $B$  den  $A$  sehen kann, liegen beide auf einer g. N.) Die Definition ist äquivalent zu der von H. S. Ruse, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 52, 183—194 (1932) (vgl. dies. Zbl. 4, 424). Die g. N. dienen ferner zur Definition von „Wellenfronten“, die den Begriff des „Dopplereffektes“ in der allgemeinen Relativitätstheorie zu präzisieren gestatten. Zum Schluß werden Erörterungen über den Energietransport in statischen und nichtstatischen Welten angestellt, die auf neuen Wegen zu bekannten Resultaten führen. Heckmann (Göttingen).

**Pastori, Maria: Insiemi tensoriali generati da sistemi assoluti di Pascal-Vitali: relazione con gli insiemi derivati.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 61—66 (1933).

Anschließend an die erste Arbeit mit demselben Titel (siehe dies. Zbl. 3, 324) zeigt die Autorin, daß  $\{^0_{rs}\}$  bzw.  $-\{^r_{s0}\}$  die kovarianten, bzw. gemischten Bestimmungszahlen des zweiten Fundamentaltensors der Fläche  $x^0 = 0$  sind, wenn die Christoffelschen Symbole in bezug auf „geodetische“ Form des ersten Fundamentaltensors von  $V_{n+1}$  berechnet werden. Auch die kovariante Ableitung eines Affinors  $T_{\mu\lambda}$  in  $V_{n+1}$  liefert in derselben Weise die Größen von  $V_n$ . Schließlich gilt dasselbe auch von den „partialen“ kovarianten Ableitungen (vgl. dies. Zbl. 3, 324) der Pascalschen Größen. Hlavatý (Prag).

**Golab, Stanislaw: Sopra certe classi di connessioni lineari.** Ann. Mat. pura appl., IV. s. 11, 283—293 (1933).

Die verallgemeinerten Riccischen Rotationskoeffizienten  $A^k_{ij}$  in bezug auf  $n$  linear unabhängige Vektorfelder  $p^v_i$  genügen den Gleichungen

$$p^u_j V_\mu p^v_j = A^k_{ij} p^v_k.$$

Der Autor untersucht die Konnexionen, für welche

$$A^k_{ij} = \alpha \delta^k_i. \quad (\alpha = \text{Skalargrößen}) \quad (1)$$

Sind diese Gleichungen nur für  $i \neq j$  erfüllt, so liegt der Fall (C) (Čebišef'sche Kongruenzen), sonst der Fall (D) vor (geodetische Čebišef'sche Kongruenzen). Aus den Gleichungen (1) lassen sich einige interessante Theoreme ableiten, welche folgender-

maßen zusammengefaßt werden können: „Läßt eine a) Riemannsche Konnexion mit positiv-definiten Fundamentalform, oder b) eine affine Konnexion mit  $R_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha} = 0$  ( $R_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha}$  ist die Krümmungsgröße), oder schließlich c) eine projektiv-euklidische, den Fall (D) zu, so ist sie krümmungslos.“ [Bemerkung des Referenten: Für eine symmetrische Konnexion ist im Falle (D) notwendigerweise  $R_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha} = 2\delta_{\lambda}^{\alpha} p_{[\alpha} V_{\mu]} \alpha$ , woraus obenerwähnte Sätze (für den symmetrischen Fall) unmittelbar folgen.]

Hlavatý (Prag).

**Cartan, Élie: Sur les espaces de Finsler.** C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 582—586 (1933).

This work of M. É. Cartan deals with a general metric space defined by  $ds = L(x, dx)$ . It begins with a just criticism of previous work in this connection by pointing out that the notion of parallelism used by some authors is not entirely analogous to that notion in euclidean geometry. To overcome this it is essential to note that the basic element in this geometry is not a point but a point ( $x$ ) and a direction ( $\dot{x}$ ). The following five conditions serve to characterise the affine connection of the space: (A) The vector of components  $\dot{x}$  is of length  $L(x, \dot{x})$  with respect to the element  $(x, \dot{x})$ . (B) Every vector transversal to the element  $(x, \dot{x})$  is perpendicular to this element. (C) If  $\vec{X}$  and  $\vec{Y}$  are two vectors and their basic element undergoes an infinitesimal rotation about the point ( $x$ ) (its center), their absolute differentials satisfy  $\vec{X} \overline{D} \vec{Y} = \vec{Y} \overline{D} \vec{X}$ . (D) If  $\vec{X}$  is carried in the direction of its element  $\overline{D} \vec{X} = 0$ . (E) The components  $\Gamma_{jk}^{*i}$  of parallel displacement of a vector, when its basic element is transported parallel to itself, are symmetric. In this manner an intrinsic affine connection may be obtained in terms of which parallel displacement of a vector preserves its length. The author points out that this connection is obtained by differentiating  $L$  at most once with resp. to  $x$  and twice with resp. to  $\dot{x}$  while the connection of Berwald contains fourth derivatives of  $L$ . Although the two connections are not the same, Berwald's connection is expressible in terms of Cartan's. — In this work  $g_{ijkl} = 0$  so that it is easier to obtain a complete set of differential invariants of the form  $L$ . However, there can be no question that the invariants obtainable by the covariant differentiation of Cartan and that of Berwald are equivalent. Nebelman.

## Mechanik.

● Chazy, Jean: **Cours de mécanique rationnelle. Tome 1. Dynamique du point matériel.** Paris: Gauthier-Villars et Cie. 1933. 392 S. u. 182 Fig. Frs. 70.—

Das vorliegende Buch bezweckt, den Leser in die höhere analytische Mechanik einzuführen und ist in diesem Sinne elementar zu nennen. Es ist jedoch vornehmlich auf Untersuchungen qualitativer Art zugeschnitten. Aus der klaren, gedrängten Darstellung sind im gewissen Sinne die leitenden Gedanken, die dieser Forschungsrichtung zugrunde liegen, zu entnehmen. — Im vorliegenden ersten Teil wird die Dynamik eines Massenpunktes behandelt. — Nach einer kurzen Einführung in die Vektorrechnung erfolgt die Zurückführung des Problems der Bewegung auf ein Differentialgleichungsproblem. Verf. entwickelt nun die klassischen Sätze von Cauchy über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. — Am Beispiele der im Punkte  $x = 0$  singulären Differentialgleichung  $x'' = 6x^{1/3}$  und anderer Probleme, in denen besagte Sätze nicht mehr angewandt werden dürfen (Gleichgewichts-Konfiguration eines Fadens usw.), beleuchtet Verf. das Verhältnis der Axiome und Prinzipien der Mechanik zu den formalmathematischen Deduktionen. — Im 3. Kapitel werden die allgemeinen Sätze über die Bewegung eines Massenpunktes abgeleitet. Es folgen einige interessante Bemerkungen, z. B. über die Existenz des Integrals der lebendigen Kraft in Fällen, wo keine Kräftefunktion existiert. Besonders wertvoll erscheint das über die Verwendung der ersten Integrale bei der Lösung der Bewegungsgleichungen Ausgeführte, sowie die Bemerkungen über die Bedingungen dafür, daß die auf analytischem Wege gewonnenen Ergebnisse dem mechanisch gegebenen Tatbestande entsprechen. — Die im 4. Kapitel durchgeführte Untersuchung der geradlinigen Bewegung eines Massenpunktes (an Hand der Sätze von Weierstraß) führt bis in das Gebiet der qualitativen Mechanik. In-



interessant sind die Bemerkungen über den Fall, in dem die Gleichung  $\dot{x}^2 = \varphi(x)$ , auf die die Diskussion des Problems zurückgeführt wird, mehrfache Wurzeln besitzt und über die Gesetze, nach denen der Übergang von der Ruhe zur Bewegung erfolgt. Der Begriff des stabilen und labilen Gleichgewichts wird in klarer Weise auseinandergesetzt; bei der Besprechung des Dirichletschen Prinzips und dessen Umkehrung wird auf Sonderfälle aufmerksam gemacht, für die es versagt. Diese Sonderfälle entsprechen den isolierten Konfigurationen, wie sie der Verf. nennt; als Beispiel einer solchen Konfiguration dient ein Massenpunkt im Nullpunkt des Koordinatensystems, wenn das Potential durch die Funktion  $U = \sin x/x^3$  gegeben wird. — Die Untersuchung der krummlinigen Bewegung eines Massenpunktes wird im Kapitel 5 bei besonderer Berücksichtigung der äußeren Balistik und der Zentralbewegungen durchgeführt. Es wird hierbei auf die qualitative Art der Untersuchung das Hauptgewicht gelegt; dadurch ist es dem Verf. möglich geworden, diese Bewegungsvorgänge auf knappen Raum in erschöpfender Weise zu besprechen. Auf die bekannten Assoziationen hinweisend, welche zwischen den Theoremen von Weierstraß und den Flächensätzen bestehen, erläutert der Verf. am Beispiele der Zentralbewegungen die ersten Periodizitätsbedingungen, die Gebiete der Sicherheit usw. — Im Kapitel 6 werden die Gleichungen der Bewegung eines Massenpunktes längs einer Kurve, insbesondere am Beispiele des ebenen Pendels, eingehend untersucht. — Vom Begriff einer geodätischen Linie auf einer Fläche ausgehend, behandelt der Verf. die Bewegung des sphärischen Pendels in erschöpfender Weise. Dieses Beispiel ist als eine Einführung zu den Arbeiten von Levi-Civita und Hadamard über die allgemeine Bewegung auf geodätischen Bahnen und zu den neueren Untersuchungen von Birkhoff über die Bewegung auf Rotationsflächen, die um eine Achse rotieren, geeignet.

G. Krall (Rom).

**Mushtari, Ch. M.: Über das Abrollen eines schweren starren Rotationskörpers auf einer unbeweglichen horizontalen Ebene.** Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 1/2, 105—126 (1932) [Russisch].

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, neue Fälle, in welchen das erwähnte Problem eine Lösung in Quadraturen gestattet, aufzusuchen. Er stützt sich dabei auf die Arbeit von Tschaplignin: „Über die Bewegung eines schweren Rotationskörpers auf einer horizontalen Ebene“ (Abh. phys. Abt. Moskauer Ges. Freunde d. Naturwiss. 9, 1897), wo die folgenden Bewegungsgleichungen angegeben sind:

$$A \frac{dp}{d\alpha} + B \frac{\xi}{\xi} \frac{dr}{d\alpha} = Br + s + A p \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

$$\xi \frac{dp}{d\alpha} - \frac{B + M \xi^2}{M \xi} \frac{dr}{d\alpha} = r \frac{d\xi}{d\alpha} - p \left( \frac{d\xi}{d\alpha} + \xi - \zeta \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (2)$$

Es bedeuten:  $G$  den Schwerpunkt,  $G_\zeta$  die Symmetrieachse,  $G_\xi$  die dazu senkrechte in der vertikalen Meridianebene liegende Achse,  $p, q, r$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und  $\xi, \zeta$  die Koordinaten des Berührungspunktes in diesem Achsensystem,  $\alpha$  den Winkel zwischen  $G_\zeta$  und der Grundebene,  $s$  den Drall eines zusätzlichen mit  $G_\zeta$  koaxialen Kreiseisels. Sind  $p$  und  $r$  bestimmt, so lassen sich alle anderen Größen (wie  $q$  usw.) durch reine Quadraturen ausdrücken. Der Verf. sucht nun nach Bewegungen, bei welchen  $r = r_0 = \text{konst.}$  ist. Dabei ergibt sich aus (1), daß  $p = m \operatorname{tg} \alpha + a/\cos \alpha$ , wo  $m = (Br_0 + s)/A$ . Aus (2) folgt dann  $\left( da \frac{d\xi}{d\alpha} = \operatorname{tg} \alpha \right)$  eine Gleichung für die Funktion  $\xi(\alpha)$ , welche die Meridiankurve bestimmt. Der Verf. betrachtet hauptsächlich zwei Lösungen, und zwar:  $\xi = \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)$  bei  $m = \frac{2}{3} r_0$  und  $a = 0$  und  $\xi = \lambda \operatorname{ctg} \alpha$  bei  $m = 2r_0$  ( $a = 0$ ). Beide Kurven sind Parabeln mit den Brennpunkten im Punkte  $G$ , deren Symmetrieachsen zu  $G_\zeta$  normal bzw. parallel sind. Die Art der Bewegung wird in beiden Fällen ausführlich diskutiert. Im Sonderfall  $s = 0$  werden für beide Fälle auch die allgemeinen Bewegungsintegrale angegeben.

Gerschgorin (Leningrad).

**Synge, J. L.: Variational principles and dissipative systems.** Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 26, 49—55 (1932).

The equations  $x_r'' + B_{rs} x_s' + C_{rs} x_s = G_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ), admit a quadratic Lagrangian function (and the corresponding variational principle) if, and only if it is possible to find  $a_{rs}$  as function of  $t$  to satisfy simultaneously

$$2a'_{rs} = a_{ru}B_{us} + a_{su}B_{ur},$$

$$\frac{d}{dt}(a_{ru}B_{us} - a_{su}B_{ur}) = 2(a_{ru}C_{us} - a_{su}C_{ur}),$$

$$|a_{rs}| \neq 0.$$

The cases  $n = 1, 2$  are discussed in detail and it is shown that there is no quadratic Lagrangian function for Whittaker's equations  $x'' = x$ ,  $y'' = x'$ . *H. Bateman.*

**Wintner, Aurel:** Dynamische Systeme und unitäre Matrizen. *Math. Z.* **36**, 630 bis 637 (1933).

Der Verf. deutet den von Carleman [*Ark. Mat. Astron. Fys.* **22** (1931), B., Nr. 7; dies. Zbl. **4**, 152] und Koopman [*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, 315—316 (1931); dies. Zbl. **2**, 57] gefundenen Zusammenhang zwischen mechanischen Systemen und unitären Operatoren im Rahmen seiner Theorie unitärer Matrizen. *E. Hopf.*

**Koopman, B. O., and J. v. Neumann:** Dynamical systems of continuous spectra. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **18**, 255—263 (1932).

Die Verff. spezialisieren den Koopman-Carleman'schen Ansatz betreffend die Zeitabhängigkeit der Raummittel [B. O. Koopman, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, (1931); dies. Zbl. **2**, 57; T. Carleman, *Ark. Mat. Astron. Fys.* **22** B (1932); dies. Zbl. **4**, 152] auf den Fall, daß die Spektralform bis auf den Ursprung stetig ist, ohne totalstetig zu sein, und daß das dynamische System außerdem einer gewissen Voraussetzung der „Nichtintegrierbarkeit“ genügt. Die Betrachtung der in dem Carleman-Koopman'schen Ansatz vorkommenden Fourier-Stieltjes'schen Integrale liefert unter diesen Hypothesen ein Resultat, das als eine im Sinne der Raummittel vollkommene Dissipation des Endzustandes oder auch dahin gedeutet werden kann, daß voneinander zeitlich hinreichend weitliegende räumlich gemittelte Phasenzustände statistisch „beinahe“ unabhängig sind. Es wird ferner gezeigt, daß für diesen Sachverhalt die zugrunde gelegten Hypothesen nicht nur hinreichend sondern auch notwendig sind. Die Frage, ob es dynamische Systeme gibt, die die zugrundegelegten Hypothesen erfüllen, bleibt offen.

*Wintner (Baltimore).*

**Neumann, J. v.:** Physical applications of the ergodic hypothesis. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **18**, 263—266 (1932).

Nach Birkhoff ist die Hypothese der metrischen Transitivität mit der Quasiergodenhypothese äquivalent [G. D. Birkhoff, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17** (1931); dies. Zbl. **3**, 256]. Der Verf. [*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **18** (1932); dies. Zbl. **4**, 310] und Carleman (*Acta Math.* **59** (1932); dies. Zbl. **5**, 207] haben auf Grund einer von Koopman [*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17** (1931); dies. Zbl. **2**, 57] und Carleman [*Ark. Mat. Astron. Fys.* **22** B (1932); dies. Zbl. **4**, 152] eingeführten Raummittelung die Äquivalenz der Hypothese der metrischen Transitivität mit einer räumlich gemittelten metaphorischen Ergodenhypothese nachgewiesen, die dementsprechend weniger scharf als die Birkhoff'sche ist. In der vorliegenden Note wird versucht, der metaphorischen Fassung der Ergodenhypothese vom Standpunkt der statistischen Mechanik aus eine physikalische Deutung zu geben. Der Verf. ist der Ansicht, daß die mathematisch weniger scharfe Fassung dem physikalischen Problem gerecht wird.

*Wintner (Baltimore).*

**Cisotti, U.:** Spostamenti rigidi finiti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **16**, 381—386 (1932).

In this paper the author deduces the well known expression for the vector displacement of any point of a rigid body which gives the analytical statement of Euler's theorem that the most general rigid displacement may be analysed into a translation and a rotation. The treatment is brief and simple and is based on the fact that the solution of the vector equation

$$x = [u \cdot x + v] \quad \text{is} \quad x = \{[u \cdot v] + [u \cdot [u \cdot v]]\} - \{1 + (u \cdot u)\}.$$

*Murnaghan (Baltimore).*



**Husson, Ed.:** La quasi-périodicité et l'approximation des trajectoires dynamiques. (55. sess., Nancy, 20. VII. 1931.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 69—72 (1931).

**Agostinelli, Cataldo:** Sul movimento dei sistemi rigidi in uno spazio di  $n$  dimensioni. Atti Accad. Sci. Torino **67**, 246—266 (1932).

Proseguendo la trattazione vettoriale dell'argomento che fu oggetto della recensione (vedi Zbl. 5, 122), l'a. in queste altre due parti del lavoro studia gli spostamenti dipendenti da due parametri, ritrovando così i risultati già conseguiti da N. J. Hatzidakis, che vengono quindi estesi al caso degli spostamenti dipendenti da  $K$  parametri. — Infine l'a. si occupa della determinazione, mediante matrici, degli elementi di quelle omografie di rotazione di cui si è salso in tutta la ricerca. *Marcolongo* (Napoli).

**Agostinelli, C.:** Sulle direzioni concorrenti in una varietà  $V_n$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 23—30 (1933).

Se un punto  $P$  di una curva appartenente ad una varietà riemanniana  $V_n$ , e un altro punto  $P_1$  sono tali che  $P_1 - P = m\mathbf{u}$  ( $m$  funzione numerica di  $P$ ,  $\mathbf{u}$  versore di una tangente a  $V_n$  nel punto  $P$ ) e lo spostamento  $dP_1$  risulta normale a  $V_n$  in  $P$ , le direzioni  $\mathbf{u}$ , secondo A. Myller, si dicono concorrenti. L'a. ritrova, per via vettoriale, le condizioni di concorrenza in forma semplice e che gli permettono la trattazione di numerosi casi particolari, nonché di assegnare altre proprietà relative alle direzioni concorrenti rispetto a due curve di  $V_n$  uscenti da  $P$ . *Marcolongo* (Napoli).

**Zagar, F.:** Sopra la variazione della eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 324—328 (1932).

Verf. knüpft an die Untersuchung Armellinis über die Exzentrizitätsänderung im Zweikörperproblem, wo die Masse der Körper sich ändert, an (s. dies. Zbl. 5, 325) und gibt eine strenge mathematische Ableitung der in der genannten Abhandlung benutzten Formeln. Es handelt sich hier um zwei Fälle, entweder bleibt die Exzentrizität konstant oder nimmt langsam zu. Die in beiden Fällen erhaltenen Resultate werden mit den Resultaten Armellinis verglichen und ihre Richtigkeit bewiesen. *Slouka*.

**Charpentier, Marie:** On certain dynamical systems with points of Peano. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 849—854 (1932).

**Kiveliovitch:** Sur quelques cas particuliers du problème des trois corps avec choes. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 763—765 (1932).

**Kiveliovitch, M.:** Régularisation des choes binaires pour des forces proportionnelles à l'inverse d'une puissance quelconque de la distance. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 227—230 (1932).

Ansatz zur Übertragung einiger der Sundmanschen Ergebnisse auf den Fall, daß die Attraktion nicht der zweiten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. *Wintner* (Baltimore).

**Miyahara, Shimesu:** A study of the theory of tides. Jap. J. Astron. Geophys. **10**, 15—49 (1932).

Anwendung von klassischen Methoden der Theorie der Integralgleichungen auf die Poincarésche Integralgleichung der Gezeiten. *Wintner* (Baltimore).

## Relativitätstheorie.

**Kasterin, N.:** Généralisation de la formule mathématique de la loi de l'aberration de lumière et du principe de Doppler et les conséquences qui en résultent pour la théorie des expériences de Michelson et de Dayton-Miller. C. R. Acad. Sci. URSS A, Nr **10**, 226—235 (1932) [Russisch].

**Šapošnikov, K.:** Le principe de Doppler et les expériences avec les sources mobiles de la lumière. C. R. Acad. Sci. URSS A, Nr **10**, 236—242 (1932) [Russisch].

Zwei ganz unrichtige Arbeiten, in welchen u. a. die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie bezweifelt wird. *V. Fock* (Leningrad).

**Lodge, Oliver J., and Alfred Lodge:** Some elementary considerations connected with modern physics. I. The Larmor-Lorentz transformation. *Philos. Mag.*, VII. s. 15, 706—726 (1933).

Geometrische Veranschaulichung der speziellen (Larmor-)Lorentztransformation in der reellen Raum-Zeit-Welt, die sich von der Minkowskischen Veranschaulichung in der Wahl des Hilfs winkels ( $u/c = \sin \alpha$ , anstatt  $u/c = \operatorname{tg} \alpha$ , wie bei Minkowski) unterscheidet, nebst Anwendungen. *Guth (Wien).*

**Le Roux, J.:** Les groupes de relativité. *J. École polytechn.*, II. s. cahier 30, 129 bis 152 (1932).

Die Arbeit ist eine zusammenfassende Behandlung der in dies. Zbl. 3, 34 und 4, 423 ref. Arbeiten des Verf. Eine Relativitätstransformation entsteht aus einer gewöhnlichen  $y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$ , worin die  $a_h$  Parameter der Transformation sind, dadurch, daß bei der Bildung der Differentiale  $dy_i$  auch die Parameter als veränderlich betrachtet werden. Sind die  $a_h^0$  die Parameter der identischen Transformation und setzt man  $\left(\frac{\partial y_i}{\partial a_h}\right)^{a=a^0} = \xi_{hi}$  so wird die Bedingung dafür, daß  $U$  eine Invariante der ursprünglichen Transformation ist:  $\sum_i \xi_{hi} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$ ,  $h = 1, \dots, r$ .

Ist  $m$  der Rang der Matrix der  $\xi_{hi}$ , so gibt es  $n - m$  unabhängige Invarianten  $\varrho_k$ . Die zugehörige Relativitätstransformation hat dann  $2(n - m)$  unabhängige Invariante, und zwar sind dies die  $\varrho_k$  und die  $\varrho'_k$ . Zum Schlusse gibt er Hinweise auf die Bedeutung dieser Theorie für einen neuen Ausbau des Relativitätsprinzips und die Grundlagen der Geometrie. *Friedrich Zerner (Wien).*

**Einstein, A., und W. Mayer:** Semi-Vektoren und Spinoren. *S.-B. preuß. Akad. Wiss. H.* 32/33, 522—550 (1932).

„Bei der großen Bedeutung, welche der von Pauli und Dirac eingeführte Spinorbegriff in der Physik erlangt hat, kann doch nicht behauptet werden, daß die bisherige mathematische Analyse dieses Begriffs allen berechtigten Ansprüchen genügt. Unsere Bemühungen haben zu einer Ableitung geführt, welche nach unserer Meinung allen Ansprüchen an Klarheit und Natürlichkeit genügt und undurchsichtige Kunstgriffe vermeidet.“ Jede reelle Lorentztransformation  $\mathfrak{D}$  kann in zwei konjugiert-komplexe Lorentztransformationen miteinander vertauschbarer Lorentztransformationen zerlegt werden:  $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$ . Die Faktoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  sind bis auf einen Faktor  $\pm 1$  eindeutig bestimmt. Die Zuordnung  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{B}$  ist eine isomorphe zweideutige Darstellung 4. Grades der Lorentzgruppe, welche in zwei äquivalente Darstellungen 2. Grades zerfällt. Ein Semi-Vektor 1. bzw. 2. Art ist ein Vierervektor, für den festgesetzt wird, daß er sich bei einer Lorentztransformation  $\mathfrak{D}$  nach der Matrix  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{C}$  transformieren soll. Für die Semivektoren werden Differentialgleichungen gebildet, die den Diracschen gleichwertig sind. Mit Hilfe der lokalen orthogonalen  $n$ -Beine (nach Fock) kann man die Semivektoren auch in die allgemeine Relativitätstheorie einbauen. Die Zerlegung der Darstellung  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{B}$  in 2 Darstellungen 2. Grades ergibt eine Zerlegung der 4-komponentigen Semivektoren in 2-komponentige Spinoren, womit der Anschluß an die Diracsche Theorie hergestellt ist. „Es scheint aber, daß infolge seines einfachen Transformationsgesetzes der Semi-Vektor dem Spinor vorzuziehen ist.“ *van der Waerden.*

**Pauli, W., et J. Solomon:** La théorie unitaire d'Einstein et Mayer et les équations de Dirac. II. *J. Physique Radium*, VII. s. 3, 582—589 (1932).

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der gleichnamigen Arbeit in derselben Zeitschrift, VII. s. 3, 452—463 (1932); dies. Zbl. 6, 85—86, und enthält zunächst die Berichtigungen einiger in der ersten Arbeit vorkommender Rechenfehler. Anstatt des sich gemäß  $\psi^{*'} = \psi^* S^+$  transformierenden Spinvektors  $\psi^*$  wird  $\psi^+ = \psi^* A$  eingeführt, der sich gemäß  $\psi^{+'} = \psi^+ S^{-1}$  transformiert;  $A$  ergibt sich zu  $i^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)} E_1 E_2 E_3 E_4$ ,  $\varepsilon = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ . Die Grundeinheiten des Sedenionensystems (die in I mit falschen



Vorzeichen vorkamen) ergeben sich zu  $G^\mu = \varepsilon e_\varrho^\mu h_\varrho^\mu A E_\varrho^-$ . Der Impulsoperator  $p_i = \partial/\partial x_i - C_i$  wird zerlegt in einen zu  $C_i^0$  gehörigen Riemannschen Teil  $p_i^0$  und ein Zusatzglied  $-\frac{1}{2}(A_\alpha G^\alpha) F_{im} G^m$ . In den Feldgleichungen

$$U_{\alpha m} = \kappa T_{\alpha m}/c^2 = \kappa/c^2 (\gamma_\alpha^n T_{nm} + c A_\alpha v_m/\sqrt{\kappa})$$

wird das rechte Glied derart als Funktion von  $\psi$  und  $\psi^+$  bestimmt, daß die Identitäten  $T_{n;m}^m = F_{nq} v^q$ ,  $v_{;m}^m = 0$  eine Folge der Diracschen Gleichung sind. Dazu wird

$$\theta_{nm}^0 = \Re \frac{\hbar c}{i} \psi^+ G_m p_n^0 \psi = \hbar c/2i \{ \psi^+ G_m (\partial/\partial x^n - C_n^0) \psi + (\partial \psi^+/\partial x^n + \psi^+ C_n^0) G_m \psi \},$$

$$\theta_n^m = \theta_n^{0m} + \frac{\hbar c}{i} \psi^+ (A_\alpha G^\alpha) F_{nr} G^{[mr]} \psi, \quad T^{nm} = \theta^{(nm)} \quad \text{und}$$

$$v_m = -e s^m + c^{-1} \sqrt{\kappa} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \partial/\partial x^r \left\{ g^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar c}{i} \psi^+ (A_\alpha G^\alpha) G^{[rm]} \psi \right\}, \quad s_m = \psi^+ G_m \psi$$

gesetzt. Der letzte Term in  $\theta_n^m$  sowie in  $v_m$  rührt vom obenerwähnten Zusatzgliede her [das unabhängig von den Verff. auch von J. A. Schouten und D. van Dantzig, Proc. Kon. Ak. Amsterdam **35**, 642—655 (1932); **35**, 844—852 (1932) und Z. Physik **79**, 639—667 (1932); vgl. dies. Zbl. **5**, 90; **5**, 271 gefunden wurde]. Dies hat zur Folge, daß man dem Erhaltungssprinzip für Impuls und Energie nicht genügen kann; es verhindert nämlich, daß  $v^4/(-e)$  negativ definit bleibt. „Cette différence entre la densité de charge et la densité de probabilité n'est, à vrai dire pas impossible a priori, mais nous paraît artificielle...“ Nicht nur aus diesem Grunde finden Verff. die Theorie unbefriedigend, sondern auch in formaler Hinsicht, weil man durch explizites Einführen der  $\gamma_\alpha^n$  und  $A_\alpha$  von Einstein und Mayer ein beliebiges Gleichungssystem einer vierdimensionalen Theorie in ein fünfdimensional invariantes überführen kann. Dies ist um so bedeutungsvoller, weil sich  $T_{\alpha m}$  nicht ohne explizites Auftreten dieser Größen schreiben läßt, und auch bei Herleitung der Gleichungen aus einem Variationsprinzip die  $T_{nm}$  und  $v_m$  „se dérivent de façon séparée... par différentiation par rapport à des grandeurs qui ne présentent aucune relation géométrique directe“. Verff. neigen deshalb mehr zur „Generellen Feldtheorie“ von Schouten und van Dantzig [die in formaler Hinsicht einheitlich ist und mittels der man die Zusatzglieder vermeiden kann].

D. van Dantzig (Delft).

**Schouten, J. A., und D. van Dantzig: Generelle Feldtheorie.** Z. Physik **78**, 639 bis 667 (1932).

Die Arbeit gibt eine erweiterte zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen der Verff. über Feldtheorie. Die Theorie der Verff. gibt gewissermaßen eine Synthese der älteren fünfdimensionalen Relativitätstheorie (Th. Kaluza, O. Klein, V. Fock) und der Theorie der allgemein-relativistischen Diracschen Gleichung (H. Weyl, V. Fock). Diese Synthese gelingt in sehr befriedigender Weise durch Heranziehung der projektiven Differentialgeometrie. Zum Schluß wird ein Vergleich mit den älteren Theorien von Veblen und Hoffmann und von Einstein und Mayer gemacht. Diese Theorien unterscheiden sich im wesentlichen durch gewisse konstante Faktoren, die in einigen den projektiven Zusammenhang definierenden Gleichungen auftreten. Durch die Forderung, daß die richtigen Diracschen Gleichungen herauskommen sollen, werden diese Faktoren eindeutig bestimmt, und zwar so wie es in der Theorie der Verff. angenommen wird.

V. Fock (Leningrad).

**Schouten, J. A.: Zur generellen Feldtheorie; Ableitung des Impulsenergiestromprojektors aus einem Variationsprinzip.** Z. Physik **81**, 129—138 (1933).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit von J. A. Schouten und D. van Dantzig über projektive Feldtheorie (vgl. vorsteh. Referat) wird eine Weltfunktion gebildet, deren Variation die Impulsenergiegleichung und die Maxwellsche Gleichung mit Diracschem Stromterm liefert. Die Weltfunktion enthält 2 Parameter, welche zu Zusatzgliedern in den genannten Gleichungen Anlaß geben können. Bei einer speziellen Wahl der Parameter fallen die Zusatzglieder fort. Im Gegensatz zur früheren Arbeit vertritt

hier Verf. die Meinung, daß diese Wahl nicht zwingend sei und daß vielleicht doch Gleichungen mit Zusatzgliedern vorzuziehen seien. *V. Fock* (Leningrad).

**Graf, U.:** Eine Abbildung nichteuklidischer Räume und die Anwendung auf die de Sitter-Welt. Berlin: Diss. 1932. 28 S.

**Tolman, R. C.:** Thermodynamics and relativity. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 49 bis 74 (1933).

Rede zum Gedächtnis von J. W. Gibbs. Wiedergabe der allgemeinen Gedankengänge, die zur Aufstellung einer bei beliebigen Transformationen von  $x, y, z, t$  kovarianten Thermodynamik führten. Besondere Betonung von Ergebnissen, die prinzipiell in der klassischen Thermodynamik nicht erhalten werden können: Abhängigkeit der Temperatur eines Gases vom Ort im statischen Schwerfeld bei thermischem Gleichgewicht, endliche, reversible Zustandsänderungen in gewissen nichtstatischen Feldern. *Heckmann.*

**Delsarte, J.:** Sur l'évolution sphérique. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 678—680 (1933).

Die in der vorstehenden Arbeit gefundene kosmologische Lösung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen wird unter Annahme radialsymmetrischer Anfangsbedingungen (welche das Bestehen der radialen Symmetrie auch für spätere Zeiten gewährleisten) diskutiert. Dabei zeigt es sich, daß die Eindeutigkeit dieser, die zeitliche Entwicklung der Welt beschreibenden Lösungen nur durch die Postulierung verwickelter — und im allgemeinen nicht sicher widerspruchsfreier — Nebenbedingungen zu erzielen wäre. *Guth* (Wien).

**Delsarte, J.:** Sur les  $ds^2$  binaires et le problème d'Einstein. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 534—536 (1933).

Verf. bemerkt, daß die bekannten Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen sämtlich auf binäre Linienelemente von der Gestalt:

$$\varphi^2 ds^2 + f^2 d\sigma^2; \quad ds^2 = ds^2(u_1, \dots, u_p), \quad d\sigma^2 = d\sigma^2(v_1, \dots, v_q); \\ f = f(u_1, \dots, u_p), \quad \varphi = \varphi(v_1, \dots, v_q); \quad p + q = 4,$$

führen. Er postuliert nun ein derartiges binäres Linienelement und erhält damit außer den schon bekannten Lösungen auch neue Formen, die er resp. für das kosmologische Problem und für eine inkompressible Flüssigkeit betrachtet. *Guth* (Wien).

**Robertson, H. P.:** Relativistic cosmology. Rev. Modern Physics 5, 62—90 (1933).

Sehr ausführlicher und vollständiger Bericht über die Arbeiten, die sich an die Maßbestimmung  $ds^2 = dt^2 - R^2(t) d\sigma^2$  anschließen. Hervorzuheben sind die anschaulichen Darstellungen der Bewegungsvorgänge durch Einbettung dieser Mannigfaltigkeiten in einen 5-dimensionalen euklidischen Raum (Verallgemeinerung des Minkowskidiagramms). Mathematische Einzelheiten sind an den Schluß des Berichtes gestellt. Ausführliche Bibliographie. *Heckmann* (Göttingen).

**Kohler, Max:** Beiträge zum kosmologischen Problem und zur Lichtausbreitung in Schwerfeldern. Ann. Physik, V. F. 16, 129—161 (1933).

Teil I: Strenge Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. Voraussetzung, daß alle Komponenten des Energie-Impuls-Tensors verschwinden bis auf  $T_{44} = -c^2 \mu$ ;  $\mu$  = Massendichte. Außer bekannten Lösungen für das Linienelement

$$ds^2 = P^2(t) d\sigma^2 - dt^2 \quad (1)$$

ergeben sich zwei prinzipiell neue für Intervalle der Form

$$ds^2 = A^2(t) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\vartheta^2] + B^2(\theta, \vartheta, t) dx_3^2 - dt^2, \quad (2)$$

von welchem die eine räumlich und zeitlich variable Dichte, die andere räumlich konstante, zeitlich variable Dichte liefert. Teil II: Auswertung des Pseudoenergietensors des Gravitationsfeldes, Strahlung eines Dipols, Lichtausbreitung in der Metrik (1). Die Beziehung zwischen Rotverschiebung eines Nebels und seiner scheinbaren Helligkeit, obwohl nicht immer eindeutig den Ort eines Nebels im Raume liefernd, gestattet prinzipielle Entscheidung über das Vorzeichen der räumlichen Krümmung. Teil III: Thermodynamik der Strahlung in der allgemeinen Relativitätstheorie. Im Gegensatz zu Teil II geometrisch-optische Betrachtungen, die sich von pseudo-euklidischen zu-



nächst auf allgemein-statische, dann auf solche nichtstatischen Maßbestimmungen übertragen lassen, deren Räume sich mit der Zeit konform transformieren. Energie, Frequenz, Temperatur eines Lichtbündels ändern sich umgekehrt proportional  $P(t)$ .  
Heckmann (Göttingen).

Straneo, P.: *La teoria unitaria dei fenomeni macroscopici della gravitazione e dell'elettricità e le sue recenti evoluzioni*. Rend. Semin. mat. fis. Milano 6, 71—90 (1932).

Viney, Irene E., and Grace G. Leybourne: *Gravitation and electricity*. II. Philos. Mag., VII. s. 15, 33—48 (1933).

In Philos. Mag., VII. s. 14, 243ff. (1932) (dies. Zbl. 5, 271) haben G. H. Livens und I. E. Viney im Minkowskischen Raum eine einheitliche Feldtheorie aufgestellt, indem sie in verallgemeinerte Maxwellsche Gleichungen den Feldtensor  $H_{jk}$  eingeführt und dessen antisymmetrischen Teil  $F_{jk}$  als elektromagnetischen Sechservektor, den symmetrischen Teil  $G_{jk}$  als Gravitationstensor gedeutet haben. In der vorliegenden Arbeit wird für diese Theorie das Prinzip der kleinsten Wirkung formuliert. In leicht verständlicher Analogie zum rein elektromagnetischen Wirkungsprinzip wird als Lagrangesche Funktion  $\int \frac{1}{4} G_{ik} G_{ik} dx_1 \dots dx_4$  und als Wirkungsfunktion

$$\int \frac{1}{4} \left[ (F_{jk} F_{jk} - G_{jk} G_{jk}) - \left( \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_k} - \varrho v_j \right) \varphi_j - \left( \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_k} - \varrho' v_j \right) \varphi'_j \right] dx_1 \dots dx_4$$

aufgestellt, worin  $\varrho$  die elektrische Ladungsdichte,  $\varrho'$  die der schweren Masse eines Volumelementes der Geschwindigkeit  $v_j$  ( $v_4 = i$ ) und  $\varphi_j$  und  $\varphi'_j$  unbestimmte Multiplikatoren bedeuten. Die Variation von  $G_{jk}$  ergibt  $G_{jk} = - \left( \frac{\partial \varphi'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi'_j}{\partial x_k} \right)$ , weshalb  $\varphi'_j$  als Vektorpotential der Gravitation bezeichnet wird. Als Wirkungsfunktion für Massensysteme im Gravitationsfeld wird

$$\int \left( L_0 - \varphi'_j \sum m_0 \frac{dx_j}{ds} \right) ds - \int \left\{ \frac{1}{4} G_{jk} G_{jk} - \varphi'_j \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_k} \right\} dx_1 \dots dx_4$$

aufgestellt, wo  $L_0$  eine nur von den Massensystemen abhängige Lagrangesche Funktion,  $m_0$  die Ruhmasse und  $ds$  die Eigenzeit der im Volumelement enthaltenen Massensysteme ist. Die Variation ergibt für die ponderomotorische Kraft auf dieses Element

$$F'_k = - \left( \frac{\partial \varphi'_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi'_j}{\partial x_k} \right) \sum m_0 \frac{dx_j}{ds}.$$

Diese Kraft läßt sich darstellen als Divergenz des Spannungstensors mit den Komponenten:

$$T_{kp} = - \left[ \frac{1}{4} G_{jn} G_{jn} \delta_{kp} + G_{jp} \frac{\partial \varphi'_j}{\partial x_k} + \varrho' v_j \varphi'_k \right].$$

Man kann aber die Analogie mit der allgemeinen Relativitätstheorie noch weiter führen und auch den Spannungs-Energietensor aus den Bedingungen für die Invarianz des Wirkungsintegrals ableiten, wenn man nur zu den Methoden des absoluten Kalküls übergeht und mit den üblichen Bezeichnungen

$$- \int \left\{ \frac{1}{4} \mathfrak{G}^{ik} G_{ik} - \varphi'_j \left( \frac{\partial \mathfrak{G}^{jk}}{\partial x_k} G^{lm} T_{lm}^j + \mathfrak{T}^j \right) \right\} dx_1 \dots dx_4$$

als Wirkungsfunktion wählt, wobei  $\mathfrak{T}^j = \sqrt{-g} \varrho' v^j$ . Die Variation ergibt dann analog wie früher:  $G_{rs} = - (\varphi'_{r,s} + \varphi'_{s,r})$  und  $F'_k = \left( \frac{\partial \varphi'_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi'_k}{\partial x_j} \right) \varrho' v^j$  und für die Dichte des Spannung-Energietensors  $S^i_k$  die Identitäten:

$$\text{div}_i \mathfrak{S}_m^i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathfrak{G}^{ik} G_{mk}) - \frac{1}{2} \mathfrak{G}^{ik} \frac{\partial G_{ik}}{\partial x_m}.$$

Zerner (Wien).

Willis, H. F.: *Gravitation and electricity*. III. Philos. Mag., VII. s. 15, 130—143 (1933).

Wendet die vorstehend besprochene Livenssche Gravitationstheorie auf ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit  $v_x$ ,  $\theta$ ,  $\theta$ , bewegtes Gravitationsteilchen der Masse  $M$  an. Für das Feld eines solchen ergibt sich ein retardiertes Vektor-Potential

$$\varphi'_r = - \frac{1}{4\pi\sqrt{1-v^2/c^2}} \iiint \varrho' \frac{v_r dx dy dz}{\sqrt{x^2/1-v^2/c^2 + y^2 + z^2}},$$

was für eine Kugel vom Radius  $a$

$$\varphi'_r = - \frac{1}{4\pi\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{M v_r}{\sqrt{y^2 + z^2 + x^2/1-v^2/c^2}}$$

im Außenraum und

$$\varphi'_r = - \frac{M v_r}{8\pi a \sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ 3 - \frac{y^2 + z^2 + x^2/1-v^2/c^2}{a^2} \right\}.$$

Für eine Kugelschale ergibt sich dasselbe Außenfeld und im Inneren

$$\varphi'_r = - \frac{M v_r}{4\pi a \sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Aus  $\varphi'_r$  wird nun Lagrangesche Funktion, Energie und Bewegungsgröße des Feldes eines solchen Teilchens berechnet, hieraus ergibt sich dann die träge Masse:

$$m_l = - \frac{M^2}{8\pi a (1-v^2/c^2)^{3/2}}, \quad m_t = - \frac{M^2}{8\pi a (1-v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Daß die „negative“ Trägheit, die Beschleunigung entgegengesetzt der wirkenden Kraft zur Folge haben sollte, nicht in Erscheinung tritt, wird daraus erklärt, daß reine „Gravitationspartikeln“ nicht vorkommen, sondern daß „Gravitation“ nur eine Eigenschaft der Protonen und Elektronen ist. Da aber  $M$  sich für ein Wasserstoffatom zu  $7,0 \cdot 10^{-27}$  ergibt, ist bei gleicher Verteilung der Gravitation und Elektrizität in den Partikeln der Wert der auf die Elektrizität zurückgehenden trägen Masse um  $10^{35}$  größer als der auf die Gravitation zurückgehende, weshalb deren Einfluß verschwindet. *Zerner.*

**Freundlich, Erwin:** Ein neuartiger Versuch von E. A. Milne, das kosmologische Problem zu lösen und die Expansion der Spiralnebel zu deuten. *Naturwiss.* 1933, 54–59.

**Milne, E. A.:** World-structure and the expansion of the universe. *Z. Astrophys.* 6, 1–95 (1933).

Vorläufige Berichte des Autors über einen Teil der Resultate dieser Arbeit in *Nature* 1932 II, 9 und 507–508 [vgl. auch dies. Zbl. 5, 272 (Kosambi)]. Teil I: Kinematische Lösung und Vergleich mit bekannten Theorien. Es wird ausführlich gezeigt, inwiefern das (rein kinematische) Bild eines Systems geradlinig gleichförmig bewegter Punkte mit irgendeiner nicht zu speziellen Geschwindigkeitsverteilung, die zu einer Zeit in einem endlichen Raumbereich liegen, nach genügend langer Zeit einen Prozeß der Selbstaussonderung zeigt, derart, daß die raschesten Punkte am weitesten vom Ausgangsgebiet entfernt sind. Ein Beobachter auf irgendeinem der Punkte wird also Proportionalität zwischen der Entfernung der Punkte und ihrer Geschwindigkeit (relativ zum Beobachter) feststellen, und zwar wird  $\dot{r} = r/t$  werden. Verf. behauptet fälschlich, daß der Faktor  $1/t$  im Gegensatz stünde zu dem analogen Faktor in der allgemein relativistischen Theorie der Ausdehnung der Welt, der konstant sei. Tatsächlich ist dieser Faktor zeitabhängig und kann in speziellen Fällen gleich  $1/t$  sein. Der Rest (20 Seiten) dieses Teiles der Arbeit ist mit Erläuterungen und kritischen Bemerkungen über die bekannten Theorien ausgefüllt. Namentlich die von der allgemeinen Relativitätstheorie gesetzte „Realität“ der Weltmetrik wird als Schwierigkeit empfunden. Das Schwergewicht der Arbeit liegt aber in Teil II: Relativistische Behandlung der kinematischen Lösung. (Nach einer brieflichen Mitteilung des Verf. an den Ref. hat dieser Teil an entscheidender Stelle noch nicht seine endgültige Form, so daß nur kurz der Gedankengang der folgenden 40 Seiten gegeben werden soll.) Es wird das Postulat aufgestellt, daß irgend zwei Beobachter  $A$  und  $B$ , deren Koordinatensysteme ineinander übergehen durch eine Lorentztransformation, stets die gleiche Weltansicht haben, d. h. die gleiche, zeitabhängige Verteilung der Koordinaten und Geschwindigkeiten beobachten sollen. Durch Hinzunahme einer Kontinuitätsforderung im Phasenraum der  $u, v, w, x, y, z$  ergibt sich daraus eindeutig eine Verteilungsfunktion  $f(x, y, z, u, v, w, t)$ . Es folgt, außer einer Reihe spekulativer Betrachtungen, die Ab-



leitung der Teilchendichte  $\sigma(x, y, z, t) = \text{konst.} (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{-3/2}$ . (Da der Verf. durchweg keine invariante Definition des Volumelementes benutzt, bezeichnet er eine andere, nicht lorentzinvariante Funktion als „Dichte“.) Das gleiche Resultat bekommt der Verf. dann auf weit einfachere Weise durch rein hydrodynamische Betrachtungen (die sich aber — was der Verf. nicht bemerkt hat — umkehrbar eindeutig abbilden lassen auf einen hyperbolischen, sich ausdehnenden Raum, in welchem [im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie nicht gravitierende] ruhende Materie gleichförmig verteilt ist. Der vermeintliche Gegensatz zur Theorie der sich ausdehnenden Welt besteht nicht). Teil III: Licht. Enthält optische Betrachtungen auf Grund einfacher Ansätze für eine „Kinematik“ der Lichtquanten, die sinngemäße Übertragung der Methoden des zweiten Teiles darstellen. Heckmann (Göttingen).

● Eddington, Arthur: *The expanding universe*. Cambridge: Univ. press 1933. VII, 128 S., geb. 3/6.

I. The Recession of the Galaxies, II. Spherical Space, III. Features of the Expanding Universe, IV. The Universe and the Atom. — Die spekulativen Ansichten des Verf. stehen weit im Vordergrund der Darstellung (vgl. dies. Zbl. 4, 43). Das Buch ist nicht populär zu nennen. Heckmann (Göttingen).

Lemaître, G.: *Condensations sphériques dans l'univers en expansion*. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 903–904 (1933).

Geht man mit dem speziellen kugelsymmetrischen Linienelement

$$ds^2 = -\left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2 \frac{d\chi^2}{\cos^2 \chi} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + c^2 dt^2$$

in die Feldgleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie ein ( $r$  = Funktion von  $\chi$  und  $t$ ), so erhält man eine Reihe einfach zu deutender Relationen. Die Komponente  $T^1_4$  des Energieimpuls-Tensors verschwindet, so daß die Materie relativ zum räumlichen Koordinatensystem ruht. Die „Zeit“  $t$  ist „universell“ (das Linienelement ist also keine direkte Verallgemeinerung des Schwarzschildschen). Die Funktion

$$\frac{2Km}{c^2} = \frac{r}{c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + r \sin^2 \chi - \frac{\lambda}{3} r^3$$

( $K$  = Grav.-Konstante,  $\lambda$  = kosmol. Konstante) definiert eine „Masse“, die viele Analogien mit dem gewöhnlichen Massenbegriff hat. Die Spannungen sind anisotrop. Mit  $r = R(t) \sin \chi$  kommt man auf die bekannten homogenen und isotropen Fälle zurück.

Heckmann (Göttingen).

Swings, P.: *Sur les  $ds^2$  d'espace-temps contenant des termes en  $dt$ . Correction à ma note*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 26 (1933).

Korrektur (fast Zurückziehung) der Arbeit des Verf. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1932, Heft 11, 216 (vgl. dies. Zbl. 6, 85).

Heckmann (Göttingen).

Takéuchi, Tokio: *Über das beschleunigende Universum*. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 610–611 (1932).

## Quantentheorie.

Schames, Léon: *Atomistische Auffassung von Raum und Zeit*. Z. Physik 81, 270 bis 282 (1933).

Spekulationen über eine Minimallänge („Längenquant“)  $l_0$  und zugehöriges Zeitquant  $t_0 = l_0/c$ , die mit den atomistischen Fundamentalkonstanten in Beziehung gesetzt werden. P. Jordan (Rostock).

● Meyerson, Émile: *Réel et déterminisme dans la physique quantique*. (Actualités scient. et industr. Nr. 68. Exposés de philosophie des sciences. Publiés par L. de Broglie. Nr 1.) Paris: Hermann & Cie. 1933. 49 S.

Im Anschluß an sein kürzlich erschienenen großes Werk, *Du cheminement de la pensée*, Paris 1931 (drei Bände), äußert sich der Verf. näher zur Frage des Determinismus in der Quantenphysik und kommt in diesem Zusammenhang auch auf die be-

kannten Ausführungen von Bohr und von Jordan über die Quantentheorie in ihrer Bedeutung für die Biologie zu sprechen. Der Abhandlung ist eine Einleitung von L. de Broglie vorausgeschickt.

L. Lichtenstein (Leipzig).

Bohr, Niels: Licht und Leben. Naturwiss. 1933, 245—250.

● Halpern, O., and H. Thirring: The elements of the new quantum mechanics. London: Methuen & Co., Ltd. 1932. XI, 215 S. 12/6.

● Jordan, Pascual: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. (Die Wiss. Hrsg. v. Wilhelm Westphal. Bd. 87.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1933. X, 112 S. RM. 6.80.

Vorliegendes Buch beabsichtigt, dem Leser eine Übersicht über die wichtigsten Gedankengänge der klassischen und der quantentheoretischen Statistik auf einer einheitlichen Grundlage zu geben, ohne zu sehr auf Detailfragen einzugehen. Nach einem einleitenden Kapitel über die klassische Gastheorie (Bernouillische Formel, Maxwellsche Verteilung, H-Theorem) werden im zweiten Kapitel zunächst die für die Statistik wichtigsten Eigenschaften quantenmechanischer Systeme kurz besprochen. Der diskrete Charakter der stationären Zustände für abgeschlossene Systeme wird betont, der Begriff des statistischen Gewichts als identisch mit dem Entartungsgrad eingeführt und die Gleichwahrscheinlichkeit aller nicht entarteten Zustände begründet. Die kanonische Verteilung wird sodann nach den Methoden von Gibbs, von Darwin und Fowler und von Boltzmann sowie durch Betrachtung der Übergänge begründet. Die Gültigkeit des Äquipartitionssatzes bildet den Gegenstand der weiteren Betrachtungen. Es folgen Anwendungen auf die spezifische Wärme von Gasen, namentlich von  $H_2$ , auf das Strahlungsgleichgewicht und auf die Thermodynamik der Kristallgitter. Das letzte Kapitel behandelt die Frage der Gasentartung bei Anwesenheit gleicher Teilchen. Besonders erfreulich ist, daß sich hier eine eingehende Besprechung der als „zweite Quantelung“ (Überquantelung) bezeichneten mathematischen Methode findet, zu deren Entwicklung Verf. ja selbst bekanntlich viel beigetragen hat. Das Buch kann wegen der klaren Darstellung sowohl zur ersten Orientierung auf dem behandelten Gebiet als auch zur Gewinnung einer Übersicht aufs wärmste empfohlen werden.

R. de L. Kronig (Groningen).

Fahmy, M.: A further point of analogy between the equations of the quantum theory and Maxwell's equations. Proc. Physic. Soc., London 45, 67—69 (1933).

Vgl. Proc. Physic. Soc., London 44, 368 (1932); dies. Zbl. 4, 281.

Fürth, Reinhold: Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik. Z. Physik 81, 143—162 (1933).

In formaler Analogie zu der Unsicherheitsrelation der Quantenmechanik läßt sich aus der klassischen Diffusionsgleichung die Unsicherheitsrelation  $\Delta x \Delta v \geq D$  herleiten, wo  $\Delta x = \sqrt{x^2}$  die geeignet definierte Unsicherheit des Ortes,  $\Delta v = \sqrt{v^2}$  die Unsicherheit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit eines Brownschen Teilchens und  $D$  der Diffusionskoeffizient ist. Mit Hilfe dieser Relation wird die Frage der Grenzen der Meßgenauigkeit mittels eines mechanischen Apparats infolge seiner Brownschen Bewegungen diskutiert und allgemein gezeigt, daß die Meßgenauigkeit bei gegebenem Apparat sich nicht durch bloße Verschärfung der Ablesung beliebig steigern läßt. Die prinzipiellen Unterschiede zwischen dieser statistischen und der quantentheoretischen Unsicherheit werden diskutiert, sowie die Frage, warum die Schrödingersche Differentialgleichung und Dichtefunktion komplex sein müssen. Nordheim (Göttingen).

Meksyn, D.: Uncertainty relations and volume of photons. Philos. Mag., VII. s. 15, 592—601 (1933).

Es werden die zu einzelnen Photonen gehörigen Felder als imaginäre Lösungen der Maxwellschen Gleichungen definiert, wobei sich eine Nichtvertauschbarkeit der elektrischen und magnetischen Kraft eines einzelnen Photons ergibt. Ferner wird ein Volumen der Photonen eingeführt.

O. Klein (Stockholm).

Destouches, Jean-Louis: Superquantification et mécanique dans des espaces abstraits. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 529—531 (1933).

Kwal, B.: Sur les trajectoires des électrons dans un champ magnétique longitudinal. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 758—760 (1933).

Verf. versucht, die bekannte Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen für



das Elektron im Magnetfeld zur Erklärung der beobachteten fadenförmigen Elektronenbündel mit konstantem oder periodisch veränderlichem Querschnitt heranzuziehen.

V. Fock (Leningrad).

**Szezeniowski, S.: Zur Frage des Übergangs der Elektronen in das Gebiet der negativen Energiewerte.** Acta Physica Polon. 1, 363—386 (1932).

Es wird die Wentzel-Brillouin-Kramersche Methode für die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung von Dirac benutzt und insbesondere der paradoxe Durchgang von Elektronen durch eine Potentialschwelle gegen die Kraft diskutiert. Unabhängig von Pauli ergeben sich die inzwischen von ihm veröffentlichten Resultate (Helv. physica Acta 5, 179; dies. Zbl. 4, 378).

O. Klein (Stockholm).

**Rupp, E.: Über Interferenz und Polarisation der Elektronen.** Scientia 53, 241 bis 248 (1933).

**Wiśniewski, F.-J. de: Sur la mécanique corpusculaire.** J. Physique Radium, VII. s. 4, 90—104 (1933).

Der Verf. versucht die quantenmechanische Beschreibung mittels der Schrödingergleichung mit einer abgeänderten klassisch-mechanischen Beschreibung zu vereinen, wo die Quantenbedingungen mittels Phasenintegrale ausgedrückt werden. Es werden verschiedene Spezialfälle diskutiert und gewisse Formeln für die Energien der stationären Zustände und den Magnetismus abgeleitet, in denen einige aus den Messungen zu bestimmenden Konstanten eingehen. [Vgl. eine frühere Arbeit desselben Verf., Ann. Mat. pura appl., IV 10, 173 (1932); dies. Zbl. 4, 379].

O. Klein (Stockholm).

**Wiśniewski, Felix Joachim: La susceptibilité diamagnétique de l'hélium.** Acta Physica Polon. 2, 23—29 (1933).

Mittels einer vom Verf. früher vorgeschlagenen abgeänderten Quantenmechanik (dies. Zbl. 4, 379) wird eine Formel für die diamagnetische Suszeptibilität von Helium abgeleitet und mit den Messungen verglichen. Vgl. vorstehendes Ref.

O. Klein.

**Elsasser, W.: Atomare Wellenfunktion im Impulsraum.** Z. Physik 81, 332—345 (1933).

Die Wellenfunktionen des Oszillators, des Rotators und des H-Atoms werden auf den Impulsraum transformiert (Fourieranalyse). Diejenigen des Oszillators müssen natürlich gegen diese Transformation invariant sein, was durch direkte Untersuchung der Hermite'schen Funktionen zu bestätigen ist. Betrachtung des Rotators liefert eine gewisse Integralgleichung der Kugelfunktionen.

P. Jordan (Rostock).

**Seyfarth, Hellmut: Elektronen- und Protonenspinmomente und deren Orientierungsmöglichkeiten als Folgerungen aus der quantendynamischen relativistisch-invarianten Differentialgleichung des Mehrkörperproblems.** Ann. Physik, V. F. 16, 636—646 (1933).

In Zusammenhang mit einer von demselben Verf. [Ann. Physik (5) 14, 321 (1932); dies. Zbl. 5, 92] früher vorgeschlagenen Behandlung des quantenmechanischen Mehrkörperproblems, wobei jedem Teilchen Dirac'sche Matrizen zugeordnet werden, die für verschiedene Teilchen antikommutativ sind, wird gezeigt, wie die entsprechenden Spinmatrizen die zu erwartenden Eigenschaften besitzen. Mathematisch hängt dies damit zusammen, daß Produkte von zwei Diracmatrizen desselben Teilchens, für verschiedene Teilchen gebildet, vertauschbar sind.

O. Klein (Stockholm).

**Bechert, K.: Bemerkung zum Wentzelschen Näherungsverfahren in der relativistischen Dynamik des Elektrons.** Helv. physica Acta 6, 82—88 (1933).

Es werden die von Pauli erhaltenen Resultate hinsichtlich der quasimechanischen Lösung der dreidimensionalen Dirac'schen Wellengleichung in übersichtlicher Weise abgeleitet, indem die Wellenfunktionen durch Operatoren ersetzt werden, die mit den Koeffizienten der Energie-Impulskomponenten in der Wellengleichung nicht vertauschbar sind.

O. Klein (Stockholm).

**Fock, V.: Über Austauschenergie.** Z. Physik 81, 195—208 (1933).

Das aus approximativer Behandlung eines Mehrkörperproblems unter Umständen entspringende Einkörperproblem (Alkaliatom!) ist bekanntlich so zu formulieren, daß

das Leuchtelektron sich in dem von den anderen Elektronen gebildeten Felde bewegt, wobei aber auch noch Austauschwirkungen zu berücksichtigen sind. Deren Berücksichtigung kann, wie jetzt gezeigt wird, in die einfachste Form derart gebracht werden, daß außer dem gegebenen äußeren elektrostatischen (und magnetischen) Feld für das Leuchtelektron auch noch ein bestimmtes „Austauschfeld“ gegeben wird. Dieses ist beschreibbar durch einen Operator  $-A$  mit

$$(x|A|x') = e^2 \frac{\varrho_0(x, x')}{|r - r'|};$$

$\varrho_0(x, x')$  ist die „gemischte Dichte“ der Elektronen im Rumpf. *Jordan* (Rostock).

**Dirac, P. A. M., V. A. Fock and Boris Podolsky: On quantum electrodynamics.** Physik. Z. Sowjetunion 2, 468—479 (1932).

Die Arbeit enthält eine äußerst durchsichtige Darstellung der ganzen Quantenelektrodynamik, wobei insbesondere der bekannte Zusammenhang zwischen der Heisenberg-Paulischen und der neueren Diracschen Form der Theorie als Beispiel eines allgemeinen Satzes der Transformationstheorie für zusammengesetzte Systeme zum Vorschein kommt.

*O. Klein* (Stockholm).

**Nikolsky, K.: The interaction of charges in Dirac's theory.** Physik. Z. Sowjetunion 2, 447—452 (1932).

Verf. erhält für die Wechselwirkung zweier Elektronen im Rahmen der neueren Diracschen Fassung der Quantenelektrodynamik die bekannten Breitschen [Physic. Rev. 34, 553 (1929)] Ausdrücke. [Vgl. auch Breit, Physic. Rev. 39, 616 (1932); dies. Zbl. 4, 39; Rosenfeld, Z. Physik 76, 729 (1932); (dies. Zbl. 4, 378) zeigte, daß die von Dirac vorgeschlagene Theorie sich von der Heisenberg-Paulischen bloß formal unterscheidet. Ref.]

*Guth* (Wien).

**Gapon, E. N.: Zur Theorie des Atomkerns. II.** Z. Physik 81, 419—424 (1933).

In Fortsetzung einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 5, 422) wird der Aufbau der Isotope in der Reihe  $Ar - Nd$  diskutiert.

*G. Beck* (Prag).

**Mukherjee, K. K.: Wellenstatistische Behandlung der  $\alpha$ -Streuung.** Physik. Z. 34, 175—179 (1933).

Es wird die Streuung von  $\alpha$ -Partikeln durch Kerne unter Hinzunahme einer zusätzlichen Polarisationskraft prop.  $\frac{1}{r^4}$  berechnet ( $2e$  = Kernladung). In den bei der Bornschen Näherungsmethode auftretenden Integralen wird  $r_0$  als untere Grenze von  $r$  angenommen, wobei  $r_0$  die kleinstmögliche Entfernung der  $\alpha$ -Partikel vom Kern darstellen soll. Durch Wahl passender Werte von  $r_0$ , die unabhängig vom Streuwinkel aber sonst verschieden sind (es kommen beim Verf.  $r_0$ -Werte von  $2 \cdot 10^{-14}$  bis  $6,08 \cdot 10^{-4}$  vor, erhält der Verf. eine ziemlich gute Übereinstimmung mit Biellers experimentellen Werten.

*Waller* (Upsala).

**Solomon, J.: Sur la théorie de la diffusion des neutrons.** C. R. Acad. Sci., Paris 196, 607—609 (1933).

Es wird die Frage diskutiert, ob die erste Näherung der Bornschen Methode für den Stoß zwischen einem Neutron und einem Kern der Ladung  $2e$  genügt bei der Annahme einer Wechselwirkung  $V(r) = 2e^2 e^{-r/q}/r$ . Der Verf. kommt zu der Schlußfolgerung, daß diese Näherung nur für Wasserstoff in einem Geschwindigkeitsintervall genügt, der genügend groß ist, um die Gültigkeit des angenommenen Wechselwirkungsgesetzes zu kontrollieren.

*Waller* (Upsala).

**Sextl, Theodor: Zur Kernstreuung von  $\beta$ -Teilchen.** Z. Physik 81, 178—185 (1933).

Verf. berechnet auf Grund der Diracschen Gleichungen mit Hilfe der Bornschen Methode in erster Näherung die Streuung von  $\beta$ -Teilchen durch Atomkerne. Dabei erhält er das Resultat, daß der Ausdruck der Rutherfordschen Streuformel sich mit einem Faktor multipliziert, der einen vom Kernspin und einen vom Relativitätsterm der Diracschen Gleichungen herrührenden Term enthält. Letzterer verursacht, daß die Streuung schneller als mit dem Quadrat der Kernladung zunimmt, was, wie ebenfalls



die Winkelverteilung, mit Experimenten von Neher übereinstimmt. Hingegen ergibt sich eine Diskrepanz für die Absolutwerte der Streukoeffizienten von Al von etwa 10–20%, wobei noch unklar ist, ob diese durch Anwendung höherer Näherungen der Bornschen Methode zu beseitigen ist.

*Houtermans* (Berlin).

**Sexl, Theodor:** Zur quantitativen Theorie der radioaktiven  $\alpha$ -Emission. *Z. Physik* **81**, 163–177 (1933).

Verf. stellt die bisherigen bekannten Rechnungen über die Zerfallskonstanten beim radioaktiven  $\alpha$ -Zerfall nach der Theorie von Gamow und Gurney und Condon zusammen. Er wiederholt die Ableitung der Formel für die Zerfallskonstanten mit Hilfe der Methode der komplexen Eigenwerte unter Beseitigung gewisser z. T. auf der etwas verschiedenartigen Definition des Kernradius beruhenden Unstimmigkeiten der einzelnen Autoren in der Berechnung des vor dem — allein maßgebenden — Exponentialglied stehenden Vorfaktors, wobei sich keine neuen, von früheren Berechnungen abweichenden Resultate ergeben. In einem mathematischen Anhang wird die in der Theorie vorkommende Differentialgleichung  $y'' + (1 - \kappa/x)y = 0$  für reelles  $x$  und  $\kappa$  integriert und die zuerst von Fock abgeleitete für große Werte von  $x$  und  $\kappa$  gültige asymptotische Näherung nach der Debyeschen Sattelpunktmethode berechnet.

*Houtermans* (Berlin).

**Wigner, E.:** On the mass defect of helium. *Physic. Rev.*, II. s. **43**, 252–257 (1933).

Der große Massendefektunterschied zwischen  $H_2$  und He wird in der Weise zu deuten versucht, daß angenommen wird, daß die Energie der Nullpunktsbewegung der Kernbausteine die Größe der Packungsenergien merklich übersteige. Die letztere ergibt sich dann als Differenz von potentieller und Nullpunktsenergie, somit als Differenz zweier großer Zahlen. Werden diese beiden so gewählt, daß sie sich bei  $H_2$  nahezu kompensieren, so resultiert für He ein großer Massendefekt.

*G. Beck* (Prag).

**Vinti, J. P., and P. M. Morse:** Variable scale atomic wave functions. *Physic. Rev.*, II. s. **43**, 337–340 (1933).

Es wird, um die Lösung von Molekül- und Atomproblemen zu erleichtern, ein vollständiges System von orthogonalen Funktionen einer Veränderlichen  $\varrho$  angegeben, welches für kleine  $\varrho$  den Eigenfunktionen eines Coulombfelds mit der Kernladung  $Z$ , für große  $\varrho$  den Eigenfunktionen eines solchen Felds mit der Kernladung Eins entspricht. Die Funktionen in Frage sind Wasserstoffatomeigenfunktionen einer Funktion von  $\varrho$ , die so gewählt ist, daß die bei Störungsproblemen auftretenden Integrale ausgerechnet werden können.

*O. Klein* (Stockholm).

**Kreisler, J.:** Über die Verteilung der Photoelektronen der  $M$ -Schale wasserstoffähnlicher Atome. *Acta Physica Polon.* **2**, 7–22 (1933).

Ermittelung der Richtungsverteilung für die aus der  $M$ -Schale eines Atoms durch polarisierte Röntgenstrahlen ausgelösten Photoelektronen als Funktion der Kernladung des Atoms und der Frequenz  $\nu$  der einfallenden Welle. Die Rechnung ist nach der Methode von Sommerfeld, Schur und Bethe durchgeführt, und zwar mit wasserstoffähnlichen Wellenfunktionen auf nichtrelativistischer Grundlage, sowie unter der Voraussetzung, daß die Wellenlänge des Röntgenlichts groß verglichen mit den Abmessungen der  $M$ -Schale ist.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Pincherle, L.:** Su una serie perturbata dello spettro dell'alluminio ionizzata. *Nuovo Cimento*, N. s. **10**, 37–42 (1933).

Es wird der störende Einfluß des  $(3p)^2 \ ^1D$ -Termes auf die Terme der Serie  $3s \ n d \ ^1D$  im Al II-Spektrum berechnet. Wegen der ungenauen Kenntnis der Eigenfunktionen beansprucht die Rechnung keine quantitative Gültigkeit, sie gibt aber die qualitativen Verhältnisse im Al II-Spektrum gut wieder.

*E. Teller* (Göttingen).

**Wheeler, John A.:** Theory of the dispersion and absorption of helium. *Physic. Rev.*, II. s. **43**, 258–263 (1933).

Es werden die Übergangswahrscheinlichkeiten im Absorptionsspektrum des Heliums berechnet. Die Ergebnisse stimmen qualitativ mit den Resultaten von I. P.



Vinti [Physic. Rev. **42**, 632 (1932); dies. Zbl. **6**, 88], der ähnliche Rechnungen ausführte, überein. Kleinere Abweichungen werden darauf zurückgeführt, daß in der vorliegenden Arbeit für den Grundzustand eine genauere Eigenfunktion (nämlich die Hylleraassche) verwendet wurde.

E. Teller (Göttingen).

**Kramers, H. A.: Propriétés paramagnétiques de cristaux de terres rares. I.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 1272—1281 (1932).

Für diejenigen seltenen Erden, deren Elektronenzahl ungerade ist, gibt es auch im festen Körper in sehr großer Annäherung (nämlich solange man die Wirkung der Nachbaratome schematisch durch die Wirkung eines Potentialfeldes darstellen kann) eine zweifache Entartung aller Terme, die nur im Magnetfeld aufgespalten wird. Infolgedessen resultieren gerade für diese Substanzen (in Übereinstimmung mit der Erfahrung) temperaturabhängige paramagnetische Effekte, die noch bis zu sehr tiefen Temperaturen herunter sehr stark zunehmen. Das Säkularproblem für diesen Fall wird streng, d. h. für ein beliebiges nicht zu starkes Potentialfeld und beliebige Stärke des magnetischen Feldes betrachtet. Hieraus werden Formeln für die magnetische Drehung der Polarisationssebene angegeben und auf gewisse von dem Potentialfeld und dem Charakter des betrachteten Terms weitgehend unabhängige Summenregeln für diesen Koeffizienten hingewiesen.

R. Peierls (Rom).

**Mulliken, Robert S.: Electronic structures of polyatomic molecules and valence. IV. Electronic states, quantum theory of the double bond.** Physic. Rev., II. s. **43**, 279 bis 302 (1933).

Der wesentliche Inhalt dieser Arbeit ist eine Untersuchung der Symmetrieeigenschaften für die Wellenfunktionen, welche den Elektronenzustand mehratomiger Moleküle beschreiben. Nach einer einleitenden Übersicht im Abschnitt 1 über die zu lösende Aufgabe werden im Abschnitt 2 die verschiedenen Methoden erörtert, mit deren Hilfe man zu angenäherten Wellenfunktionen des mehratomigen Moleküls durch lineare Kombination von Wellenfunktionen getrennter Atome bzw. zweiatomiger Moleküle kommen kann. Besitzt nun das Kerngerüst des mehratomigen Moleküls in seiner Gleichgewichtslage Symmetrieeigenschaften, so sind diese bei dem Aufbau der Wellenfunktionen zu berücksichtigen. In Abschnitt 3 und 4 werden deshalb die Darstellungen der 32 Symmetrieklassen nebst der benutzten Bezeichnungsweise ausführlich besprochen. Das Vorhandensein von Symmetrieeigenschaften führt zu Auswahlregeln zwischen den Molekültermen, deren Ableitung den Gegenstand von Abschnitt 5 bildet. Eine Verallgemeinerung des Franck-Condonschen Prinzips auf mehratomige Moleküle wird hierbei aufgestellt, beruhend auf dem Gesichtspunkt, daß während des Elektronenübergangs Lage und Geschwindigkeiten der Kerne im wesentlichen ungeändert bleiben werden. Der Abschnitt 6 behandelt die Frage der Zerlegung von Darstellungen in irreduzible bei Erniedrigung der Symmetrie. Im Abschnitt 7 werden die Ergebnisse dazu verwendet, um die Anzahl und den Typus der Molekülzustände zu ermitteln, die aus einer gegebenen Elektronenkonfiguration entspringen. Der letzte Abschnitt bringt eine Anwendung auf das (hypothetische) Molekül  $\text{CH}_2$  und auf das Molekül  $\text{C}_2\text{H}_4$ , wobei auf die Frage der Drehbarkeit bei Doppelbindung näher eingegangen wird. Der spektroskopischen Prüfung der Resultate dürfte leider durch die bei angeregten Elektronenzuständen mehratomiger Moleküle beinahe stets auftretende Prädissoziation ernstliche Hindernisse in den Weg gelegt werden (vgl. dies. Zbl. **5**, 275).

R. de L. Kronig (Groningen).

**Placzek, G., und E. Teller: Die Rotationsstruktur der Ramanbanden mehratomiger Moleküle.** Z. Physik **81**, 209—258 (1933).

Von Placzek stammt eine Behandlung des Schwingungs-Ramaneffektes auf Grund der Abhängigkeit des Tensors der Polarisierbarkeit der Molekel von der Lage der Kerne (dies. Zbl. **2**, 170). Auf dem gleichen Wege werden hier zunächst vom klassischen Standpunkt (Zerlegung des Tensors in Fourierkomponenten) einige allgemeine Züge des Rotations- und Rotations-Schwingungs-Ramaneffektes gezeigt.



Dann werden (quantentheoretische Behandlung) die Matrixelemente des Tensors berechnet: zunächst Auswahl- und Polarisationsregeln, Summensätze des allgemeinen Falls, dann im besonderen Matrixelemente für die Modelle des symmetrischen Kreisels, Kugelkreisels, der linearen Molekel. Die Ergebnisse werden auch angewandt auf den empirisch wichtigen Fall der unaufgelösten Rotationsstrukturen. Als Beispiele dienen: zweiatomige Molekeln, die linearen Molekeln  $\text{CO}_2$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ ,  $\text{C}_2\text{H}_2$ , die ebene und räumliche Molekel  $\text{XY}_3$ , Molekeln  $\text{ZXY}_3$ ,  $\text{XY}_4$ . Für den asymmetrischen Kresel werden nur die Auswahlregeln angegeben. *F. Hund (Leipzig).*

**Arkadiew, W.: Berechnung der Permeabilität und der Verluste in ferromagnetischen Blechen bei beliebiger Frequenz.** Physik. Z. Sowjetunion 3, 1–28 (1933).

**Fröhlich, Herbert: Über die Absorption der Metalle im Sichtbaren und Ultravioletten.** Z. Physik 81, 297–312 (1933).

Auf Grund der von Kronig und Fujioka entwickelten Vorstellungen über die Lichtabsorption und -dispersion in metallischen Leitern versucht Verf., die Lage und Breite der erlaubten und verbotenen Energiezonen bei einigen Metallen aus den optischen Konstanten im Sichtbaren und Ultravioletten näher zu bestimmen. Er nimmt dabei das periodische Potential, welches die Wirkung der Metallatome auf die Leitungselektronen ersetzt, in der Form  $V(x, y, z) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$  an, was zur Folge hat, daß sich das dreidimensionale Problem in drei eindimensionale spaltet, indem z. B. der Impuls der Elektronen durch die Lichtabsorption nur in der  $x$ -Richtung geändert wird, wenn der elektrische Vektor der Lichtwelle diese Richtung hat. Unter Benutzung bekannter Auswahlregeln für die Übergänge läßt sich dann aus den optischen Konstanten die ungefähre Breite der verbotenen Energiezone zwischen der höchsten besetzten und der darüberliegenden erlaubten, aber unbesetzten Energiezone ermitteln, wofür sich bei Cu, Ag und Au ein Wert von einigen Volt ergibt. Aus der Stärke der Absorption wird ferner der Schluß gezogen, daß bei den Alkalien die Leitungselektronen in viel höherem Maße frei sind als bei Cu, Ag und Au. Dem Referenten erscheint die Vereinfachung betreffend die Form des Potentials bei den quantitativen Schlußfolgerungen etwas bedenklich, da nach Untersuchungen von Bethe über die Fourierzerlegung des Potentials in Kristallgittern die gemischten Terme in  $x$ ,  $y$  und  $z$  dieselbe Größenordnung haben wie die nur von  $x$ ,  $y$  oder  $z$  abhängigen. *R. de L. Kronig.*

## Kristallographie.

**Fokker, A. D.: Kristallsymmetrie und Gitterschwingungen.** Physica 13, 1–30 (1933).

Es werden die möglichen simultanen Schwingungen von Atomgruppen, die in einem Kristall durch Symmetrioperationen ineinander übergeführt werden können, für alle in Raumgruppen vorkommenden Symmetrieelemente geometrisch-anschaulich aufgezählt. Bei den Fundamentalschwingungen können zusammengehörige Atome in Phase miteinander oder um  $2\pi/\nu$  in der Phase gegeneinander verschoben sein, wo  $\nu$  ein Teiler von  $n$ , der Ordnung des Symmetrieelements, ist. Je nach Art des Symmetrieelements treten dabei elektrische Momente auf. Bei der Kombination mehrerer Symmetrieelemente zu endlichen Gruppen spalten die Schwingungsgruppen entsprechend auf. Der Fall der Entartung wird nicht betrachtet. *Heesch (Göttingen).*

**Perlitz, Harald: Abstandsänderungen nächster Nachbaratome in einigen Elementen und Legierungen bei Umordnung aus der kubischen flächenzentrierten Anordnung in die kubische raumzentrierte oder die hexagonale dichteste Anordnung.** Acta et Comment. Univ. Tartu A 22, Nr 4, 1–72 (1932).

Es werden an einer großen Reihe von Elementen und Legierungen ausführlich Atomabstände der drei im Titel erwähnten Strukturtypen und deren Beziehungen zueinander diskutiert. Es konnten die diesbezüglichen Aussagen von V. M. Goldschmidt bestätigt werden. *Laves (Göttingen).*